Enonceé bac1990(P)

Exercice 1 on donne $f(z)=z^3+2(-\sqrt{3}+i)z^2+4(1-i\sqrt{3})z+8i$

1) a) montrer que l'équation $f(z)=0$ admet une solution imaginaire pur z_0 que l'on déterminera

b) résoudre alors $f(z)=0$ on note z_1 et z_2 les deux autres racines ; z_1 celle qui a une partie imaginaire négative

2) On pose $\omega=\dfrac{z_1}{z_0}$

a) donner la forme trigonométrique de ω

b) le plan etant raporté a un repere orthonormé $(O;\vec{U};\vec{V})$ a tout nombre complexe z non nul on associe les ponts $M; M_1; M_2$ *d'affixes* respectives $z; \omega z; \omega^2 z$; montrer que OMM_1M_2 est un losange

Exercice2 Dans le plan orienté on considere un triangle ABC non isocele tel que $\left(\overrightarrow{AB};\widehat{\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$

a tout point M de (AB) on associe le point N de (AC) tel que M et N soient dans un meme demi plan de bord (BC) et BM = CN

1) Montrer qu'il existe une seule rotation R telle que pour tout point M de (AB) on a R(M) = N et R(B) = C

préciser une mesure de son angle et construire son centre Ω

2) Soit $O=B*C$ on pose $f=S_{(O\Omega)}oR$

a) déterminer f(B) et $f(\Omega)$

b) Préciser les éléments caractéristiques de f

3) Soit $I=M*N$ a) quel est l'ensemble D des pointd I lorsque M décrit (AB)

b) construire D

Probleme

I) soit $f:]-1;1[\to IR; x\mapsto f(x)=\int_0^x \dfrac{t^2}{1-t^2}dt$

1)a) Justifier l'existence de f

b) Montrer qu'il existe trois reéls $\alpha;\beta$ et γ tels que $\forall t\in IR-\{-1;1\}\ \dfrac{t^2}{1-t^2}=\alpha+\dfrac{\beta}{1-t}+\dfrac{\gamma}{1+t}$

c) en déduire que $\forall x\in]-1;1[$ on a : $f(x)=\dfrac{1}{2}Log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-x$

2) Etudier les variations de f et construire saz courbe C dans un repere orthoonormé $(Oo;\vec{I};\vec{J})$

3)a) Mntrer que $\forall x\in IR_+^*;\forall k\in IN^*;\ Logx\le\dfrac{x}{k}-1+Logk$

b) En déduire que $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}Logx\,dx\le Logk$ et par suite $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}Logx\,dx\le Log(n!)$

c) Montrer que $\forall n\in IN^*;\ Log(n!)\ge(n+\frac{1}{2})Log(n+\frac{1}{2})-n+\frac{1}{2}Log2$

4) Soit (u_n) la suite definie sur IN^* par : $u_n=Log(n!)-(n+\frac{1}{2})Logn-n$

a)Montrer que $\forall n\in IN^*: u_n\ge\frac{1}{2}Log2$

b) vérifier que $\forall n\in IN^*;\ u_n-u_{n+1}=(2n+1)f(\dfrac{1}{2n+1})$

c) En déduire que (u_n) est convergente

II) Soit la suite (v_n) définie par $v_0=\displaystyle\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ et $\forall n\in IN^*; v_n=\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$

1)calculer v_0

2) a) $(o;\vec{I};\vec{J})$ R.O.N déterminer l'ensembles des points M(x; y) tels que $y^2-x(1-x)=0$

b)

$b)$ verifier que $\forall n \in IN^*$ on a : $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f(\frac{1}{2n+1})$

$c)$ en déduire que (u_n) est convergente

II) soit la suite (v_n) définie par $v_0 = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ et $\forall n \in IN^*; v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$

1) calculer v_0

2)$a)$ Le plan etant rapporte a un repere O.N $(o;\vec{I};\vec{J})$ déterminer l'ensemble des point $M(x;y)$ tel que $y^2 - x(1-x) = 0$

$b)$ En déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3)a) Montrer que (v_n) est décroissante

b) en déduire qu'elle est convergente

4) a) Prouver à l'aide d'une intégration par partie que $\forall n \in IN$: $v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n$

b) En déduire que $\forall n \in IN; \frac{n+2}{n+5} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$ et que $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

5)a) montrer par récurrence que $\forall n \in IN; v_{n+1}.v_n = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b) En faisant apparaitre dans l'expression précédente le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ montrer que $\lim n^{\frac{3}{2}}v_n = \sqrt{2\pi}$

6) Montrer que $\forall p \in IN; v_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}\frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}$

$III)$ (u_n) etant la suite definie dans I)4)

1) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $e^{u_n} = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}e^n$

2) exprimer $e^{2u_p - u_{2p}}$ en fonction de p et de v_{2p}

3) soit $l = \lim u_n$ déduire de ce qui précede que $l = Log\sqrt{2\pi}$ on admet que $\lim u_{2p} = \lim u_p = l$

CORRECTION (Exposeé par guesmi.boubaker)

EXERCICE1 1)a) soit $z_0 = \alpha i$; $f(\alpha i) = 0$ en fasant le calcul on trouve $\alpha = -2 \Rightarrow z_0 = -2i$

$b)$ en ecrivant $f(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$ et en identifiant on obtient $a = -2\sqrt{3}$ et $b = 4$ et alors les solutions de $f(z) = 0$ seront $z_0 = -2i$; $z_1 = \sqrt{3} - i$ et donc $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + i$ (vu que l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ *est a coefficient reéls*)

2)a) $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (evident))

b) OMM_1M_2 est un losange $\Leftrightarrow OM = OM_2$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_2M_1}$; $OM = |z|$; $OM_2 = |\omega^2 z| = |z|$

EXERCICE2 1) on a :: $BM = CN$ et $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc il existe une seule rotation R tel que $R(B) = C$ et $R(M) = N$ de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$ le centre Ω appartient au cercle de diametre [BC] et a la médiatrice de [MN] d'ou a l'intersection

2)a) $f(B) = B$ et $f(\Omega) = \Omega$ (evident)

b) f est la composeé d'un deplacement avec un anti déplacement donc c'est un anti d'placement d'ou f est une symétrie orthogonale ou un glissement mais puisque f admet deux points fixes B et Ω alors $f = s_{(B\Omega)}$

3)a) On a : $\Omega M = \Omega N$ et $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc le triangle ΩMN est rectangle isocele en Ω et par suite

$(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$ et $\Omega I = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega M$ d'ou $S(\Omega;\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2})(M) = I \Rightarrow D = S(AB)$

PROBLEME 1)a) la fonction qui a $t \mapsto \frac{t^2}{1-t^2}$ continue sur $]-1;1[$ donc elle admet une primitive

b) en ecrivant $\frac{t^2}{(1-t)(1+t)} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}$ en multipliant les deux membres par $1-t$; en simlifiant et puis on

remplace t par 1 on trouve $\beta = \frac{1}{2}$ en multipliant par $1+t$ en simplifiant puis en remplacent t par -1 on trouve $\gamma = \frac{1}{2}$

en faisant la différence on trouve $\alpha = -1$

c) d'aprés a) et b) en intégrant on obtient $f(x) = -x + \frac{1}{2}Log(\frac{1+x}{1-x})\ \forall x \in]-1;1[$

2) $f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0\ ;\forall x \in]-1;1[$

3)a) soit la fonction $g(x) = Logx - x + 1$ en étudiant g sor $]0;+\infty[$ on voit que g a de tun maximum 0 en 1

d'ou $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow Logx \leq x-1$; on poe $y = \frac{x}{k}$ on obtient le résultat demandé

b) on integre l'inégalité $Logx \leq \frac{x}{k} - 1 + Logk$ entre $k - \frac{1}{2}$ et $k + \frac{1}{2}$ et en passant a la somme entre $k = 1$ et $k = n$

en remarquant que $Log(a\,b) = Loga + Logb$ on obtient $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} Logx\,dx \leq Log(n!)$

c) en faisant une integration par partie on a : $\int_1^x Logt\,dt = xLogx - x$ pour $x > 0 \Rightarrow [xLogx - x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \leq Log(n!)$

d'ou $(n+\frac{1}{2})Log(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}Log2 \leq Log(n!)$

4)a) d'aprés 3)c) et le fait que $(n+\frac{1}{2}) \geq n$ on aura $u_n \geq \frac{1}{2}Log2$

b) $u_n - u_{n+1} = (2n+1)\left[\frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2}Log\frac{n+1}{n}\right]$; il suffit de remarque que $\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n}$

on about a $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f(\frac{1}{2n+1})$

c) on a $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $2n+1 \geq 0 \Rightarrow u_n - u_{n+1} \geq 0$

donc (u_n) décroissante minorée par $\frac{1}{2}Log2$ donc convergente

SUITE CORRECTION BAC 1990

II) 1) on pose $v(x) = 1 - x$ alors $v'(x) = -1$; sachant qu'une primitive de $f'f^n$ est $\frac{1}{n+1}f^{n+1}$

d'ou $v_0 = \left[-\frac{1}{3/2}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

2) a) $y^2 - x(1-x) = 0 \Leftrightarrow y^2 + (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ c'est l'equation d'un cercle $C(I;\frac{1}{2})$ avec $I(0;\frac{1}{2})$

donc l'ensemble cherche est le cercle C

b) $v_1 = \int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ (on rappele que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$)donc $v_1 = \int_0^1 y\,dx$ qui est l'aire du demi disque de bord (C)

alors $v_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{8}$

3)a) on a : $0 \le \sqrt{x} \le 1$ pour $x \in [0;1]$ donc $\int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx \le \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx \Leftrightarrow v_{n+1} \le v_n$

(v_n) décroissante et minoreé par 0 donc convergente

4) $v_{n+2} = \int_0^1 x^{\frac{n+2}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ par intégration par partie on pose $u = x^{\frac{n+2}{2}} \Rightarrow u' = \frac{n+2}{2}x^{\frac{n}{2}}$; $v' = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

d'ou $v_{n+2} = \frac{n+2}{3}\int_0^1 x^{\frac{n+2}{2}}(1-x)(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{n+2}{3}\int_0^1 \left[x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{n+2}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]dx$

$v_n = \frac{n+2}{3}v_n - \frac{n+2}{3}v_{n+2} \Leftrightarrow v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n$

b) on a (v_n) est décroissante donc $v_{n+2} \le v_{n+1} \le v_n \Rightarrow \frac{n+2}{n+5} \le \frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1 \Rightarrow \lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

5)a) on a : $v_0\ v_1 = \frac{2}{3}x\frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{2x3x4}$ la relation est donc vraie pour n = 0

on a $v_{n+1}v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n v_{n+1}$ or par hypotese de récurrence on a : $v_n v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ *alors*

$v_{n+1}v_{n+2} = \frac{2\pi}{(n+3)(n+4)(n+5)}$

b) on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n v_{n+1}}{v_n^2} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)v_n^2}$ mais puisque $\lim (\frac{v_{n+1}}{v_n}) = 1$ puisque $\lim v_n = \lim v_{n+1}$

alors $2\pi = \lim v_n{}^2 n^3$ puisque $\lim (n+2)(n+3)(n+4) = \lim n^3$ en passant a la racine carré (exposant $\frac{1}{2}$) ; $\sqrt{2\pi} = \lim n$

6) pour $p \in IN$ on a

$$v_{2p} = \frac{2p}{2p+3}v_{2p-2}$$

$$v_{2p-2} = \frac{2p-2}{2p+1}v_{2p-4}$$

.

.

$$v_{2x1} = \frac{2}{2x1+3}v_0 = \frac{2}{5}x\frac{2}{3}$$

$$v_{2x1} = \frac{2}{2x1+3} v_0 = \frac{2}{5} x \frac{2}{3}$$

En multipliant membre a membre les égalites on obtient $v_{2p\,(C)} = \dfrac{(2p)(2p-2)\,x.......x(2)x(2)}{(2p+3)(2p+1)x............x5x3}$

$$= \frac{2x2^{p}\,p!}{(2p+3)(2p+1)x........x5x3}$$

$$= \frac{2.2^{p}.(2p)(2p-2)......x4x2}{(2p+3)(2p+1)2p(2p-1)(2p-2).........x4x3}$$

$$= \frac{2.\left[2^{p}\,p!\right]^{2}}{(2p+1)!(2p+3)}$$

III)1) $e^{U_n} = e^{Log\, n!}\ e^{Log\frac{1}{n+\frac{1}{2}\,n}}.e^{n}$

$$= \frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

2) $e^{2U_p - U_{2p}} = \dfrac{\left(e^{U_P}\right)^2}{e^{2P}} = \dfrac{(p!)^2}{p^{2p+1}}\dfrac{e^{2p}}{\dfrac{(2p)!e^{2p}}{(2p)^{2p+\frac{1}{2}}}} = \dfrac{(p!)^2\,2^{2p}\sqrt{2p}\ p^{2p}}{p^{2p}.p(2p)!} = (2^{p}\,p!)^2.\dfrac{\sqrt{2p}}{p(2p)!} = v_{2p}\,\dfrac{(2p+1)(2p+3)}{\sqrt{2p}}$

3) ona : $e^{2u_p - u_{2p}} = e^{u_p}.e^{u_p - u_{2p}} = v_{2p}\,2p\sqrt{2p}(1+\dfrac{1}{2p})(1+\dfrac{3}{2p})$ d'ou $\lim e^{u_p} x1 = \lim v_{2p} x2p\sqrt{2p}x \lim(1+\dfrac{1}{2p})(1+$

$(\lim u_p = \lim u_{2p})$ et $\lim(1+\dfrac{1}{2p})(1+\dfrac{3}{2p}) = 1$ alors $\lim e^{u_p} = e^{l} = \sqrt{2\pi} \Leftrightarrow l = Log\sqrt{2\pi}$

FIN

ENONCE BAC 1990(C)

EXERCICE1 onlance un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 a 6 ce dé est truqué de facon qu'a cha
d'obtenir un nombre pair soit égal au double de celle d'obtenir un nombre impair

1) on lance le dé une fois et on note p la probabilité d'obtenir un nombre pair

a) calculer p

b) on déduire la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 2

2) on lance le dé trois fois calculer la probabilité de chacun des évenements suivants :

a) on obtient deux fois et deux fois seulement le nombre 2

b) on obtient au moins deux fois le nombre 2

EXERCICE2 $(O;\vec{U};\vec{V})$ un R.O.N.D 1) soit g l'application de P dans P qui a tout point M d'affixe z associe
le point M' d'affixe $z' = (1-i\sqrt{3})z + (1+i)\sqrt{3}$ déterminer les éléments caractéristiques de g

2) soit dans P l'homothétie h de centre $\Omega(1,-1)$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$ on pose $f = hog$

déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

3)Soit D : y = x déterminer et construire l'image de D par f

PROBLEME

Soit P le plan rapporté à un repere $(O;\vec{I};\vec{J})$ et Δ : y = x

A) Soit $f(x) = Log(1+2x)$ et (C) sa courbe représentative de f

1) étudier les variations de f

2) on désigne par φ la fonction definie par $\varphi(x) = f(x) - x$

a) montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α avec $1 < \alpha < 2$

b) Déterminer les positions de C et Δ

$c)Tracer C et \Delta$

3) a) montyrer que f admet une une fonction réciproque f^{-1} dont on tracera sa courbe C' dans le meme

b) determiner $f^{-1}(x)$ pour tout reél x

c) calculer en fonction de α l'aire du domaine limité par C et C' et les droites $x = o$ et $x = \alpha$

4)On définie la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour $n \in IN : u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in IN; 1 \leq U_n \leq \alpha$

b)Montrer que (U_n) est stricement croissante

c) En deduire que (U_n) est convergent e et déterminer sa limite

B) Dans cette partie $n \geq 2$; soit $f_n(x) = Log(1 + nx)$ et (C_n) sa courbe représenta tive

1) Montrer que ; $\forall x \in]1;+\infty[$ on a : $1 - \frac{1}{x} \leq Logx \leq \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$

2) Montrer que l'équation $f_n(x) - x = 0$ admet deux solutions (on notera α_n la solution non nulle)

3)a) Montrer que $Logn \leq \alpha_n \leq 2Logn$

b) En déduire que $Logn \leq \alpha_{nj} \leq Log(1 + 2nLogn)$

c) calculer $\lim \frac{\alpha_n}{Logn}$ quand $n \to +\infty$

4) Soit Φ la fonctin du plan P dans lui meme qui a tout point M associe le point M' barycentre de(H; (n

H désigne le projeté orthogonal de M sur $(O;\vec{J})$

a) Montrer que si M(x; y) alors $M'(\frac{2}{n}x; y)$

b) Montrer que $\Phi(C_2) = C_n$

$c)Construire\ C_4$