BAC1993(P)

EXERCICE1

On donne deux points distincts F et T

1) Soient deux droites sécantes D_1 et D_2 en T et distinctes de (FT)

a) construire la directrice Δ de la parabole ayant pour foyer f et de tangentes D_1 et D_2

b) construire les points de contacts M_1 et M_2 de cette parabole et des droites D_1 et D_2

c) on désigne par H_1 et H_2 les projetés orthogonaux de M_1 et M_2 sur Δ

Montrer que le triangle TH_1H_2 est isocele et que $(\overrightarrow{TH_1};\overrightarrow{TH_2}) \equiv 2(D_1;D_2)(2\pi)$

d) Montrer que $T \in \Delta \Leftrightarrow D_1$ et D_2 perpendiculaires

2) Soit D une droite variable passant par T et distincte de (FT) et P une parabole de foiyer F et tangente à D.

On désigne par M le point de contact de P et D par H son projeté orthogonal sur la directrice de P

quel est l'ensemble des points H quand D varie

3) Soit (Γ) une parabole de foyer F de directrice d et d'axe δ

un point M de Γ se projette en h sur D

a) Montrzer que (FH) est une bissectrice de (FM,δ)

b) construire les points d'intersections de Γ et (FT)

EXERCICE2

AA_1A_2 un triangle tel que $AA_2 = 2AA_1$ et qu'une mesure de $(\overrightarrow{AA_1};\overrightarrow{AA_2})$ est entre 0 et π les cercles (C_1) et (C_2) passant par A et de centres respectifs A_1 et A_2 se recoupent en B

1) on désigne par S_A la similitude directe d centre A transformant C_1 en C_2 soit $M \in C_1$ et $M' = S_A(M)$

a) justifier la relation $(\overrightarrow{A_1A};\overrightarrow{A_1M}) \equiv (\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'})(2\pi)$

b) Démontrer que les points M; B; M' sont alignes

2) on désigne par σ_A la similitude indirecte transformant C_1 en C_2

a) donner le rapport de σ_A et montrer que son axe est la droite D médiatrice de $[A_2K]$, $K = A * A_2$

b) soit $f = \sigma_A o S_A^{-1}$

déterminer la nature de f et la caractériser en déduire que les images par S_A et σ_a de tout point M du plan sont symétriques par rapport à(AA_2)

PROBLEME

A) $m \in IR^*$; $\begin{cases} f_m(x) = mxLog|x| - x; x \neq 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases}$

1)a) etudier la continuite et la dérivabilité de f_m en 0

b) Montrer que f_m est impaire et étudier suivant les valeurs de m ses variations

c) on désigne par C_m la courbe représentative de f_m dans un R.O.N $(o;\vec{I};\vec{J})$ et par A_m et B_m les points de C_m correspondants aux extréma de f_m donner une equation de l'ensemble des points A_m et B_m lorsque $m \in IR^*$

2) soit g la fonction définie sur $IR_+ - \left\{\frac{1}{e}\right\}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{-x}{1+Logx} \\ g(0) = 0 \end{cases}$ a) etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0

b) étudier les varitions de g et tracer sa courbe Γ dans le repere

$B)$ dans cette partie on prend $m = 1$ et on note f la restriction de f_1 à IR_+ et C sa courbe représentative dans un repere 0.N $(W; \vec{u}; \vec{v})$

1)a) tracer C

b) Montrer que la restriction φ de f à [0;1] est une bijection de [0;1] sur un intervalle J que l'on précisera

c) quel est l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

d) tracer dans un R.ON $(W'; \vec{u'}; \vec{v'})$ les courbe (C_φ) et $(C_{\varphi^{-1}})$ de φ et φ^{-1}

2) pour tout reél $a \in]0;1]$ on note $I(a) = \int_a^1 [-x - \varphi(x)]dx$

a) calculer I(a)

b)en déduire le calcul de l'aira S du domaine limité par (C_φ) et $(C_{\varphi^{-1}})$ et de la droite $D : y = -x$

3) soit (u_n) la suite définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = e \\ u_n > 0; u_{n-1}.f'(u_n) = f(u_{n-1}) \end{array} pour n \geq 1 \right\}$

a) calculer u_n en fonction de n

b) pour tout entier naturel k on note M_k et M_{k+1} les points de la courbe C d'abscisses respectives u_k et u_{k+1} et S_k la mesure de l'aire du triangle WM_kM_{k+1} montrer que $S_k = \frac{1}{2}\left[U_{k+1}f(U_k) - U_k f(U_{k+1})\right]$ et calculer S_k en fonction d k

c) on définie la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k$ calculer $\lim S_n$ en $+\infty$

FIN

CORRECTION (Proposeé par GUESMI.BOU BAKER)

EXERCICE1 1)a)P la parabolle de foyer F et de directrice Δ ; on sait que le symétrique du foyer par rapport à une tangente appartient à la directrice donc soit $S_{D_1}(F) = H_1$ et $S_{D_2}(F) = H_2$ donc $(H_1H_2) = \Delta$

b) La perpendiculaire à Δ mené de H_1 et H_2 coupent respectivement D_1 et D_2 en M_1 et M_2
les cercles $C(M_1; M_1F)$ et $C(M_2; M_2F)$ sont tangents en H_1 et H_2 à Δ donc M_1 et M_2 sont deux points de la parabole P dont D_1 et D_2 sont deux tangentes

c) D_1 méd$[FH_1] \Rightarrow TF = TH_1$:; D_2 méd$[FH_2] \Rightarrow TF = TH_2$ donc $TH_1 = TH_2$ d'ou le résultat (TFH_1 et TFH_2 isoceles) on a alors $(\overrightarrow{TH_1}; \overrightarrow{TH_2}) \equiv 2(D_1; D_2)(2\pi)$

d) $T \in \Delta \Leftrightarrow T \in (H_1H_2) \Leftrightarrow (\overrightarrow{TH_1}; \overrightarrow{TH_2}) \equiv \pi(2\pi) \Leftrightarrow (D_1; D_2) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow D_1 \perp D_2$

2)$H = S_\Delta(F); T \in \Delta \Leftrightarrow TH = TF \in H \in C(T; TF)$

3) a) Γ parabole de foyer f de directrice d et d'axe $\delta \Rightarrow d \perp \delta$; $M \in P$ et H sont projeté orthogonal sur $d \Rightarrow (MH) \perp d$ donc $d//(MH)$

b) le triangle MFH est isocele en M donc [HM; HF] = [FH; FM]; on pose $\delta \cap d = \{I\}$[HM; HF] = [FH; FI](alternes interne et d//(MH)) donc $[FH)$ est la bissectrice de l'ange demandé

b) on veut construire un ou plusieur point de (FT) appartenant àΓ

soit $\Delta_1 \perp (FT)$ et $F \in \Delta_1$; $\{I\} = d \cap \Delta_1$; alors $C(I; IF) \cap d = \{K; L\}$ les perpendiculaires àd issues de K et L coupent (FT) en M_1 et M_2 deux point de Γ

EXRRCICE2

1)a) $S_A(C_1) = C_2 \Rightarrow S_A$ transforme le centre A_1 en $A_2 \Rightarrow S_A(A_1) = A_2$; $S_A(A) = A$; $S_A(M) = M' \Rightarrow (\overrightarrow{A_2A}; \overrightarrow{A_2M}) \equiv (\overrightarrow{A_1A}; \overrightarrow{A_1M'})$

$b)$ montrons que M; B et M' sont alignes on a : $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM'})$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{A_1M};\overrightarrow{A_1B}) + (\overrightarrow{A_2A};\overrightarrow{A_2M'})\right] \equiv 0(\pi)\text{ ; vu a)}$$

donc M; B et M' sont alignés

2) a)σ_A similitude indirecte / $\sigma_A(C_1) = (C_2) \Rightarrow \sigma_A(A_1) = A_2$ donc sont rapport $k = \frac{\overline{AA_2}}{AA_1} = 2$

soit Δ l'axe de la similitude $\Rightarrow A \in D$; $\sigma_A = h(A;2)oS_\Delta = S_\Delta oh$

on sait que le milieu d'un point et de son image appartient à l'axe

ona $\sigma_A(A_1) = A_2 = h(A;2)oS_D(A_1)$ soit $A' = S_\Delta(A_1)$ donc $h(A;2)(A') = A_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{AA'}$ et Dméd$[A'A_1]$

donc $A' = A * A_2 = K \Rightarrow K \in D$

b) $f = \sigma_A oS_A^{-1} \Rightarrow$ f est une simitude directe le rapport de σ_A est 2 et celui de S_A^{-1} est $\frac{1}{2}$ donc f est une isométrie

(rapport = 1) ; $f = S_D ohoh^{-1}oR^{-1} = S_D oR^{-1}$ qui est la composé de trois symétries orthogonales

donc c'est soit une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante mais puisque $f(A_2) = A_2$; $f(A) = A$ donc $f = S_{(AA_2)}$

PROBLEME

1)a) i)$\lim f_m(x) = 0$ quand $x \to 0 = f_m(0)$ donc f_m est continue en 0

ii) $\lim f_m(x)\frac{1}{x} = \infty$ suivant les valeurs de m donc f_m n'est pas dérivable en 0

b) f_m est impair (évident)

$\forall x > 0$; $f'_m(x) = m\text{Log}x + m - 1$ létude se fait sur $[0,+\infty[$ la fonction est impaire

si $m > 0$: f_m est stricement décroissante sur $]0;e^{\frac{1}{m}-1}[$ et stricement croissante sur $]e^{\frac{1}{m}-1};+\infty[$; $f_m(e^{\frac{1}{m}-1}) = -me^{\frac{1}{m}-1}$

si $m < 0$ le résultat est évident

2)$A_m(e^{\frac{1}{m}-1};-me^{\frac{1}{m}-1})$; on pose $x = e^{\frac{1}{m}-1}$ on voit que A_m décdit la droite $D : y = -mx$; par raison de symétrie il existe dur IR

un point $B_m(-e^{\frac{1}{m}-1};me^{\frac{1}{m}-1})$; f_m est impaire donc B_m décrit la symétrique de D par rapport à O ; mais puisque D passe par O elle est donc invariante par S_O donc B_m decrit aussi D

2) ii)$\lim g(x) = 0$ quand $x \to 0^+$; ii) $\lim g(x).\frac{1}{x} = 0$ quand $x \to 0^+$ donc g est continue et dérivable à droite de 0

3)$g'(x) = \frac{-\text{Log}x}{(1+\text{Log}x)^2}$; il est simple de prouver que g est croissante sur $]0;\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e};1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$

B) 1) a) $\forall x \geq 0 \left\{\begin{array}{c} f(x) = x\text{Log}x - x \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$, d'aprés le tableau de varition de f_m $(m = 1)$

A)1)b) et $m = 1$ on a : f stictement décroissante sur [01] et croissante sur $[1;+\infty[$; $f(o) = 0$; $f(1) = -1$

alors $J = [-1;0]$; $\varphi = f_{[0;1]} \Rightarrow \varphi$ réalise une bijection de [0;1] dans [0;1] le domaine de dérivabilité de φ^{-1} et [-1;0]

2)a) $I(a) = \int_a^1 [x - \varphi(x)]dx$; $\varphi(x) = f(x)$ sur [0;1]

$= -\int_a^1 x\text{Log}x\, dx$; intégration par partie $u' = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2}$; $v = \text{Log}x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{2}a^2(\text{Loga} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$

b) puisque c_φ et $C_{\varphi^{-1}}$ sont symétriques par raport à $D' : y = x$ alors $S = 2I(a)$ et $S \to \frac{1}{2}$ U.A quand $a \to 0$ puisque $a \in]0;1]$

3) a) $f(x) = x\text{Log}x - x$ donc $f'(x) = \text{Log}x$

$u_{n-1} f'(u_n) = f(u_{n-1}) \Leftrightarrow Log(u_n) = Log(u_{n-1}) - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{e} u_{n-1}$; donc (U) est une suite géométrique de premier terme

$u_0 = e$; et de raison $\frac{1}{e} \Rightarrow u_n = e(\frac{1}{e})^n = \frac{1}{e^{n-1}}$

b) $M_k(U_k ; f(u_k))$; $M_{k+1}(u_{k+1} ; f(u_{k+1}))$; on a : $(W;\vec{u};\vec{v})$ repere $\Rightarrow W(0;0)$ soit A = aire du triangle WM_kM_{k+1}

$A = \frac{1}{2} x WM_k x d(M_{k+1};(WM_k))$; (distance d'un point à une droite)

cherchons alors une équation cartésienne de (WM_k) ; soit donc $M(x;y) \in (WM_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{WM_k}$ et $\overrightarrow{WM}$ sont colinéaires

donc $\begin{vmatrix} x & u_k \\ y & f(u_k) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x.f(u_k) - yu_k = 0$ donc la distance $d(M_{k+1};(WM_k)) = \frac{|u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})|}{\sqrt{(f(u_k))^2 + u_k^2}}$

or $WM_k = \sqrt{(f(u_k))^2 + u_k^2}$ donc aprés simplification $A = S = \frac{1}{2}|u_{k+1}f(u_k) + u_k f(u_{k+1})|$

ona : $u_k = \frac{1}{e^{k-1}}$ on trouve alors $S_k = \frac{1}{2e^{2k-1}}$; S_n est la somme de n terme d'une suite géométrique de

premier terme 1 et de raison $\frac{1}{e^2}$ multiplier par $\frac{e}{2}$ donc $S_n = \frac{e}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{2n}}}{1 - \frac{1}{e^2}}$

en passant à la limite on a : $\lim S_n = \frac{e^3}{2(e^2 - 1)}$

FIN