BAC1992 ENONCE

EXERCICE1 (bac 1995 sx exp) une boite B_1 contient trois jetons numérotés 0;0;2

une boite B_2 contient 4 jetons numérotés 1;1;3;4

1) on tire au hasard un jeton de chaque boite et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le produit des des nombres inscrits sur les 2 jetons tirés; déterminer la loi de X

2) on effectue trois fois le tirage décrit à la question précédente ; chaque jeton est remis aprés chaque tirage quelle est la probabilité de chacun des évenements suivant

a) avoir exactement de" ux fois un produit supérieur à 4

b) avoir au plus une fois un produit supérieur à 4

3) une épreuve consiste à faire un tirage d'un jeton de la boite B_1 en remettant a chaque fois le jeton tire

on désigne par P_n la probabilité de l'évenement

<< obtenir le jeton numéroté 2 au n - eme tirage pour la premiere fois >>

a) calculer $P_1 ; P_2 ; P_3$ puis P_n

b) calculer la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$ et $\lim S_n$

EXERCICE2

soit n un entier naturel non nul et $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = x(Log x)^n \end{cases}$

1) etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 et f_2 sur $[0;+\infty[$

2) etudier et représenter f_1 et f_2 dans un meme repere

3) on considere la suite (u_n) par $\forall n \in IN^* ; u_n = \int_0^e f_n(x)dx$

a) Démentrer que (u_n) est décroissante

b) Démontrer que $\forall n \in IN^* : u_n \geq 0$

c) Démontrer que : $\forall n \in IN^* \; u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} u_n$

En deduire que $\forall n \in IN^* ; u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

d) determiner $\lim u_n$ en $+\infty$

PROBLEME (lecondidat doit utilise ; completer et remettre la figure ci contre)

dans le plan on considere un triangle IBC tel que $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

on désigne par (C) le cercle de centre i et de rayon IB et par H le milieu de [BC] la demi droite $[IH)$ coupe (C) en A

soit $A' = S_{(IC)}(A)$

1)a) montrer que $A'C = AB$

b) soit R la rotation tel que $R(B) = C$ et $R(A) = A'$; déterminer son centrer et une mesure de son angle

2) La droite (CI) recoupe le cercle (C) en D ; on pose $f = S_{(AH)} o S_{(BD)}$ et $I' = S_{(BD)}(I)$

a) montrer que (BD)//(AH)

b)déterminer f(B) et f(I')

c) donner la nature de f et la caractériser

d) en déduire que $I' \in (C)$

3) soit $A'' = t_{\overrightarrow{BC}}(A')$

a) montrer que $(A'B)//(AC)$

b) en déduire que $A'' \in (AC)$

c) Montrer que $I'A' = AA''$

4) $J = A * A'$ et $K = I' * A''$

a) Montrer que $(IA)//(JK)$

b) Montrer qu'il existe un seul déplacement g tel que $g(A') = A$ et $g(I) = A'$

c) Montrer que $g(K) = J$

d) Montrer que g n'a pas de points invariants

e) Donner la décomposition canonique de g

5) soit ξ l'éllipse de foyers I et k et dont la mesure du grand axe $2a = BC$

a) soit $M = I * A$; montrer que $M \in \xi$ et que (MJ) est tangente à ξ en M

b) Déterminer les sommets de ξ

c)Tracer ξ

CORRECTION(PROPOSE PAR GUESMI.BOUBAKER)

EXERCICE1

1)a) le produit des 2 nombres des deux boites est 0;2;6 ou8 donc $X(\Omega) = \{0;2;6;8\}$

$P(x = 0)$; c'est tirer 0 de B_1 et n'importe quel chiffre de $B_2 \Rightarrow P(x = 0) = \frac{2}{3}$

$P(x = 2)$; $(2 \text{ et } 1) \Leftrightarrow P(x = 2) = \frac{1}{3} x \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$

$P(x = 6)$; (2 et 3) ; $P(x = 6) = \frac{1}{3} x \frac{1}{4}$

$P(x = 8 =$; (2 et 4) ; $P(x = 8) = \frac{1}{3} x \frac{1}{4}$

2)a)A << obtenir un produit > a4 >>

B << obtenir exactement un produit > a 4 >>

$P(A) = P(x = 6) + P(x = 8) = \frac{1}{6}$

on ait en presense d'une loi Binomiale $B(2; P(A))$

$P(B) = C_3^2 (\frac{1}{6})^2 (1 - \frac{1}{6})$

b) obtenir au plus un produit > 4 >>

C << obtenir 0 fois ou 1 fois un produit > 4 >>

$P(C) = C_3^0 (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^3 + C_3^1 (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2$ puisque l'épreuve est repéter 3 fois

3)a) on tire de B_1 un jeton avec remise on note P_n << obtenir le jeton n° 2 au n - ime tirage

$P_1 = \frac{1}{3}$; P_2 : tire 0 puis 2 $\Leftrightarrow P_2 = \frac{2}{3} x \frac{1}{3}$; P_3 : tirer 0 puis 0 puis 2 $\Rightarrow P_3 = (\frac{2}{3})^2 x \frac{1}{3}$

P_n : tire (n - 1) fois 0 puis le n - ime tirage 2 $\Rightarrow P_n = (\frac{2}{3})^{(n-1)} x \frac{1}{3}$; $S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (\frac{2}{3})^{i-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}}\right) \to 1$ en $+\infty$

EXERCICE2

1)*i*) $f_1(x) = x\mathrm{Log}x$; $\lim x\mathrm{Log}x \to 0$ quand $x \to 0^+$ or $f_n(0) = 0$ donc f_1 est continue à driote de 0 $\Rightarrow$ continue sur $[0;+\infty[$

$\lim f_2(x) = \lim x(\mathrm{Log}x)^2 = \lim(\sqrt{x}\mathrm{Log}x)^2 = 0$; en 0^+ donc f_2 continue à droite de 0 donc sur $[0;+\infty[$

ii) dérivabilité de f_1 en 0 ; on a : $\lim \mathrm{Log}\, x = -\infty$ en 0^+ donc f_1 n'est pas dérivable en 0 donc pas sur $[0;+\infty[$

meme chose $\lim \frac{f_2(x)}{x} \to +\infty$ en 0 donc la fonction n'est pas dérivable sur $[0;+\infty[$

$f_1'(x) = \mathrm{Log}x + 1$; $f_2'(x) = \mathrm{Log}x[\mathrm{Log}x + 2]$ (le tableau est simple à faire)

3)a)$u_n = \int_1^e f_n(x)dx$; pour $1 \le x \le e$ la fonction Log est croissante $\Rightarrow 0 \le \mathrm{Log}x \le 1 \Rightarrow 0 \le (\mathrm{Log}x)^{n+1} \le (\mathrm{Log}x)^n$

donc en passant aux intégrales on aura $0 \le u_{n+1} \le u_n$

b) voir a)

c) $\int_1^e x(\mathrm{Log}x)^{n+1}dx = u_{n+1}$; intégration par partie on pose $u = (\mathrm{Log}x)^{n+1} \Rightarrow u' = (n+1)\frac{1}{x}(\mathrm{Log}x)^n$; $v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

alors on obtient le résultat $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{(n+1)}{2}u_n$ on $u_{n+1} \ge 0 \Rightarrow u_n \le \frac{e^2}{n+1}$

d) $0 \le u_n \le \frac{e^2}{n+1}$ en passant aux limites on a : $\lim u_n = 0$ en $+\infty$

correction du probleme

1)a) on peut remarquer simplement que IBC est équilatéral ; $S_{(AH)}(B) = C$; $S_{(AH)}(A) = A$ donc

$S_{(IC)}(A) = A'$; $S_{(IC)}(C) = C$ donc $AC = A'C = AB$

b) $R(B) = C$; $R(A) = A'$ son angle est $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'C}) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$ son centre Ω verifie $\Omega B = \Omega C$et $\Omega A = \Omega A'$ donc

Ω est l'intersection des médiatrices de $[BC]$ et $5AA']$ d'ou $\Omega = I$

2)a) IBC est équilatéral et $H = B * C$ donc (AH) perpendiculaire à (BC) ; BCD est inscrit dans (C) dont [CD] diametre donc (BC) perpendiculaire à (BD) d'ou le résultat

b) $f(B) = C$ et $f(I') = I$

c) $(AH)//(BD)$ donc $f = t_{\vec{U}}$ ona : $f(B) = C$ donc $\vec{U} = \overrightarrow{BC}$ $f(I') = I$ donc $II' = BC = IC$ alors $I' \in (C)$

3)a) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$(angles inscrits) $\Rightarrow (A'B)//(AC)$

b) f est une translation et $f(A'B) = (A''C)$; $f(B) = C$ donc $(A'B)//(A''C)$ or vu que $(A'B)//(AC)$ donc $A'' \in (AC)$

$f(I') = I$; $f(A') = A'' \Rightarrow I'A' = IA''$; IAA'equilatéral (IA) perpendiculaire à $(BC)//(A'A'') \Rightarrow (A'A'')$méd[IA]

alors $A''I = A''A$; par suite $I'A' = AA''$

4)a) $J = A * A'$; $K = I'*A''$ f conserve les milieux alors $(JK)//(AI)$

b) on a : $(A'A'')$méd[IA]donc $AA' = IA'$; Idistinct de A' $\Rightarrow$ il existe un seul déplacement g/ $g(A') = A$ et $g(I) = A'$

c) on a : $K = I'*A''$; $g([IA']) = [AA']$ d'ou le résultat

d) si g est une symétrie orthogonale $\Rightarrow gog = Id$ or $gog(I') = A \Rightarrow$ g admet une droite globalement invarinte

$\Rightarrow$ g est une sumétrie glissante $\Rightarrow$ g n'a pas de points invarint

e)$g = S_\Delta o t_{\vec{V}} = t_{\vec{V}} o S_\Delta$ l'axe d'une symétrie glissante passe par le milieu d'un point et de son image *alors* $\Delta = (JK)$; $gog = t_{2\vec{V}}$; $gog(U) = A$ donc $\overrightarrow{V} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$

5) a) $M = I * A$ et $J = A'*A \Rightarrow MK = MI = \frac{1}{2}BC$ donc $MI + MK = BC \Rightarrow M \in \xi$

b) Un sommet $P = A'*K$ l'autre est $P' / \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{IP'}$

Puisque le symétrique d'un foyer K par rapport à une tangente appartient au cercle directeur relatif a l'autre foyer $I \Rightarrow$ la tangente est (MJ) car $S_{(MJ)}(K) = A$

FIN

fin de la correction