BAC1991(P)

EXERCICE1 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et (C) son cercle circonscrit on construit les cercles C ' et C '' de meme rayon et de centre B et C et tangents extérieurements l'un a l'autre

1) Soit M le point de C' et M ' le point de C '' tel que $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM'}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ bMontrer que la m & diatrice de [MM'] passe par un point fixe que l'on déterminera

2) H est le projeté orthogonal de M sur (AM') déterminer l'ensemble des points H quand M' décrit C '; construire cet ensemble

3) soit D le point diamétralement opposé à A sur C et $M'' = R(D;\frac{2\pi}{3})(M')$

MontrerqueM et M'' sont diamétralements opposé sur C '

EXERCICE2 Un sac contient 7 jetons indiscernables au toucher et réparties comme suit

- quatres jetons blancs numérotés 1;2;2;2
- trois jetons noirs numérotés 1;1;2

1) on tire sucssesivement et avec remise trois jetons du sac

a) calculer la probabilité d'avoir trois jetons blancs

b) calculer la probabilité que parmis les trois jetons tirés il y en ait deux et deux seulement qui portent le numéro 1

2) On remet tous les jetons dans le sac et on tire de nouveau trois jetons succéssivement de la maniere suivante

- si le jeton tiré porte le numéro 2 il et remis dans le sac

si non il n'est pasremis dans le sac

a) calculer la probabilité d'avoir trois jetons nlancs

b) calculer la probabilité pour que deux seulements des trois jetons tires porte le numéro 1

PROBLEME

Soit $f(x)\ \mathrm{Log}\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$

PARTIE A :

1)a) Montrer que $DF = \mathrm{IR}_+$

b) Etudier les variations de f

c) Tracer sa courbe representative C dans un R.ON $(O;\vec{I};\vec{J})$

2) a) soit $y > 0$ résoudre dans IR_+ l'équation en x : $e^x + e^{-x} - 2 = y$

b)Montrer que f admet sur IR_+ une fonction réciproque g ; et déduire de ce qui précede g(x)

PARTIE B

1) soit h une fonctionnumérique a variable reélle dérivable et et strictement monotone sur un intervalle I

a) Montrer que h^{-1} admet une primitive sur h(I)

b) Soit h une primitive de h^{-1} *sur* h(I) demontrer que Hoh est une sur I de $x \mapsto xh'(x)$

soit $(\alpha;\beta) \in I^2$ déduire que $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt$

2)a) en déduire l'aire de la partie limité par la courbe C et les droites d'équations $x = \frac{(e-1)^2}{e}$ *et* $y = 0$

PARTIE C

1)a) Montrr que pour $x > 0$ on a : $\mathrm{Log}(1 + x) \leq f'(x) \leq \mathrm{Log}(2 + x)$

b) soit $\theta(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ pour $x \geq 0$ montrer que θ est stricement décroissan te sur $[1;+\infty[$ et en déduire

que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une solution γ dans $]1;4[$

2) on considere la suite (u_n) ; $n \in IN$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(2u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour $n \in IN$ on a : $u_n \in [1;2]$

b) Montrer que pour $n \in IN$ ona : $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|u_n - \frac{1}{2}\gamma\right|$

c) En deduire $\lim u_n$ en $+\infty$

CORRECTION (PROPOSEE PAR GUESMI.BOU BAKER)

EXERCICE1 1) ABC etant & quilatéral d'ou $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow R(A;\frac{\pi}{3})(B) = C$

de meme $BM = CM'$ et $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM'}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \Leftrightarrow R(M) = M'$

$\Rightarrow \begin{cases} R(M) = M' \\ R(A) = A \end{cases} \Rightarrow AM = AM' \Leftrightarrow A \in méd[MM']$ d'ou A est le seul point fixe

2) vu 1) $R(A;\frac{\pi}{3})(M) = M'$ montre que le triangle AMM' est équilatéra l $\Rightarrow (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AH}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et $\frac{AH}{AM} = \frac{1}{2}$

montreque $S(A;\frac{\pi}{3};\frac{1}{2})(M) = H$ or $M \in C$ donc $S(M) = H \in S(C) = \Gamma$(cercle)

3) on pose $R' = R(D;\frac{2\pi}{3})$ on a : $R'(D) = D$ et $R'(M') = M''$

de meme $R'(C) = B$alors $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM''}) = (\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM'}) + (\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{BM''}) = \pi$ donc $[MM'']$ diametre de C'

EXERCICE2 1) a) soit A l'évenement << avoir 3 jetons blanc >> Le tirage etant successif et avec remise *le* mot indiscerna ble au toucher signifie qu'on ait dans le cas d'une probabilit é uniforme alors

$$P(A) = \frac{\text{nombre de favorables}}{\textit{nombre de cas possible}} = \left(\frac{C_4^1}{C_7^1}\right)^3$$

b) parmis les 3 jetons tires on veut avoir exactement deux qui portes le numéro 1

donc on peut avoir (1;1;2)ou (1;2;1)ou(2;1;1) il ya 3jetons de numero 1 et 4 de numéro 2

soit B léévenemen t d'ou $P(B) = 3x\left(\frac{C_3^1}{C_7^1}\right)^2 \frac{C_4^1}{C_7^1}$

2)*a*) on peut avoir $(B_1;B_2;B_2)$ puis par permutatio n de B_1 puis 3 blancs de numéro 2

soit C l'évenement $P(C) = (\frac{1}{7})(\frac{3}{6})^2 + \frac{3}{7}x\frac{1}{7}x\frac{3}{6} + \frac{3}{7}x\frac{3}{7}x\frac{1}{7} + (\frac{3}{7})^3$

b)D << avoir deux jetons numéro 1 >> donc (1;2;1)et on permute le 2 dans le triplet

$$P(D) = \frac{3x2x4}{7x6x5} + \frac{3x4x2}{7x6x6} + \frac{4x3x2}{7x7x6}$$

CORRECTION BAC (P) (PROPOSE PAR GUESMI BOUBAKER)

PROBLEME

PARTIE A) 1)a) $f(x) = \text{Log}\left(\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$; avec $x(x+4) > 0$ il faut que $x+2+\sqrt{x^2+4x} > 0$ soit $k(x) = x+2+\sqrt{x^2+4x}$

$x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$; $k'(x) = 1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} = \dfrac{x+2+\sqrt{x(x+4)}}{\sqrt{x(x+4)}}$; $x+2+\sqrt{x(x+4)} > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+4)} > -(x+2)$

i) si $x \in [0;+\infty[$ donc $-(x+2) < 0$ et $\sqrt{x(x+4)} > 0$ donc toujours vrai

ii) si $x \in]-\infty;-4[$ alors $-(x+2) > 0$ en elevant au carré on obtient $\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2 > (x+2)^2 \Leftrightarrow 0 > 4$ impossible

conclusion $Df = [0;+\infty[$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+4)}} > 0$ f est strictement croissante sur IR_+ $f(0) = 0$ et $\lim f = +\infty$ en $+\infty$

2)a) $e^x + e^{-x} - 2 = y$; $y > 0$ équation en x on pose $t = e^x > 0$; l'équation est équivalente à

$t + \dfrac{1}{t} - 2 - y = 0 \Leftrightarrow t^2 - t(y+2) + 1 = 0$; $\Delta = (y+2)^2 - 4 > 0$

$t' = \dfrac{y+2+\sqrt{y(y+4)}}{2}$ ou $t'' = \dfrac{y+2-\sqrt{y(y+4)}}{2}$ on a $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 1$; en multipliant le numérateur et le dénominateur par l expression conjugué on a : $t'' = \dfrac{4}{2(y+2+\sqrt{y(y+4)})} < 1$ vu que $y > 0$ à rejeter donc

$t = \dfrac{y+2+\sqrt{y(y+4)}}{2}$ (c'est logique puisque $\dfrac{y+2}{2} > 1$)

$e^x = \dfrac{y+2+\sqrt{y(y+4)}}{2} \Leftrightarrow x = Log\left(\dfrac{y+2+\sqrt{y(y+4)}}{2}\right)$

b) f etant continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$; $f(0) = 0$; $\lim f(x) = +\infty$ en $+\infty$

donc f réalise une bijection de $IR_+ dans IR_+$; $\forall y \in IR_+$; $\exists! x \in IR_+$ tel que $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \text{Log}\left(\dfrac{y+2+\sqrt{y(y+4)}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2e^x = y+2+\sqrt{y^2+4y} \Leftrightarrow y = e^x + e^{-x} - 2 = f^{-1}(x) = g(x)$

PARTIE B

1)a)h continue et strictement crissabte sur h(I) donc admet une fonctoin récproque h^{-1} ; h^{-1} continue sur h(I) donc admet une primitive sur h(I)

b) en général on sait que $(uov)'(x) = u'(v(x)).\, v'(x)$

H est une primitive de $h^{-1} \Leftrightarrow H'(x) = h^{-1}(x)$

$(Hoh)'(x) = H'(h(x)).h'(x) = h^{-1}(h(x)).h'(x) = xh'(x) \Leftrightarrow$ Hoh est une primitive de $x \mapsto xh'(x)$

c)on sait qu'une primitive de h^{-1} est H d'ou $\displaystyle\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt = H(h(\beta)) - H(h(\alpha)) = (Hoh)(\beta) - (Hoh)(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt$

2)a) $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{(e-1)^2}{e}\right) = 1$

b) L'aire du domaine limité par la courbe C les droites d'équations $y = 0; x = 0$ et $x = \dfrac{(e-1)^2}{e}$ est $A = \displaystyle\int_0^{\frac{(e-1)^2}{e}} |f(x)|dx$

en faisant une intégratio n par partie $u = f \Rightarrow u' = f'$; et $v' = 1 \Rightarrow v = t$

$$A = \int_0^{\frac{(e-1)^2}{e}} f(t)dt = \left[tf(t)\right]_0^{\frac{(e-1)^2}{e}} - \int_0^{\frac{(e-1)^2}{e}} tf'(t)dt \text{ or d'aprés c) on peut écrire } A = \left[tf(t)\right]_0^{\frac{(e-1)^2}{e}} - \int_0^1 f^{-1}(t)dt \text{ (vu 2)a))}$$

$$= \frac{(e-1)^2}{e} - \int_0^1 (e^t + e^{-t} - 2)dt = \frac{2}{e}$$

PARTIE C

1)a) $x > 0$: montrons que $\mathrm{Log}(1+x) \leq f(x) \leq \mathrm{Log}(2+x)$

$\mathrm{Log}(1+x) - f(x) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{2(1+x)}{x+2+\sqrt{x(x+4)}}\right)$ on a : $\dfrac{2(1+x)}{x+2+\sqrt{x(x+4)}} < 1 \Rightarrow Log(1+x) \leq f(x)$

de meme ona : $x+2+\sqrt{x(x+4)} \leq x+2+\sqrt{(x+2)^2}$ $\quad (x > 0)$

en divisant par 2 et en passant au Log on obtient $f(x) \leq \mathrm{Log}(2+x)$

b) $x \geq 0$ $\theta(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$; $\theta'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{x(x+4)}}{x(x+4)}$ le dénominate ur est positif donc le signe de

θ' est le meme que $2 - \sqrt{x(x+4)}$ soit $N(x) = 2 - \sqrt{x(x+4)}$; $N'(x) = \dfrac{-(x+2)}{\sqrt{x(x+4)}} < 0$ (puis que $x \geq 0$)

sur $[1;+\infty[$; $N(x)$ est décroissan te et on a : $N(1) = 2 - \sqrt{5} < 0$ et $\lim N(x) = -\infty$ en $+\infty$

alors $\theta'(x) < 0$ sur $[1;+\infty[\Rightarrow \theta$ est decroissan te sur le meme intervalle et θ dérivable ;

$\theta(1) > 0; \theta(4) < 0 \Rightarrow$ il existe un seul reél $\alpha \in]1;4[$ solution de $\theta(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$*xadmetunes eulesoluti on* dans $]1;4[$

2) $\begin{cases} u_0 = 1; & u_{n+1} = f(2u_n) \end{cases}$ pour $n = 0 ; 1 \in [1;2]$; supposons que pour $p > 0$ on a : $u_p \in [1;2]$

f etant croissante sur $IR_+ \Rightarrow f(u_p) \in [f(1); f(2)]$; $f(1) = \mathrm{Log}(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \approx 0{,}96$; $f(2) \approx 1{,}31$

donc $u_{p+1} \in [1,2]$

b) pour $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+4x} \geq \sqrt{5}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; d'apprés le TAF il existe un reél c entre $2u_n$ et γ

tel que $\left|f(2u_n) - f(\gamma)\right| = \left|f'(c)\right| . \left|2u_n - \gamma\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left|2u_n - \gamma\right|$

d'ou $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma\right| \leq \dfrac{2}{\sqrt{5}}\left|u_n - \frac{1}{2}\gamma\right|$

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\gamma\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|u_{n-1} - \frac{1}{2}\gamma\right|$$

$$\left|u_{n-1} - \frac{1}{2}\gamma\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|u_{n-2} - \frac{1}{2}\gamma\right|$$

$$. \quad \leq \quad .$$

$$. \quad \leq \quad ;$$

$$\left|u_1 - \frac{1}{2}\gamma\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|u_0 - \frac{1}{2}\gamma\right|$$

en multiplian t mombre a mombre on obtient $\left|u_n - \frac{1}{2}\gamma\right| \leq \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \left|1 - \frac{1}{2}\gamma\right|$ puisque $2 < \sqrt{5}$ *alors* $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$

D'ou en passant à la limite on aura $\mathrm{Lim}\left(\left|u_n - \frac{1}{2}\gamma\right|\right) \leq 0$ donc $\mathrm{Lim}\ u_n = \frac{1}{2}\gamma$

FIN DE LA CORRECTION

10 - ??????.mp3

Oum kalthoum