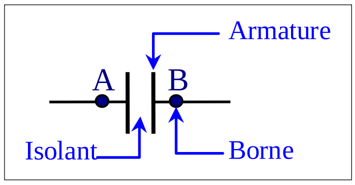
Partie C : Évolution des systèmes électriques

Chapitre 6 : Le dipôle RC

1. Le condensateur

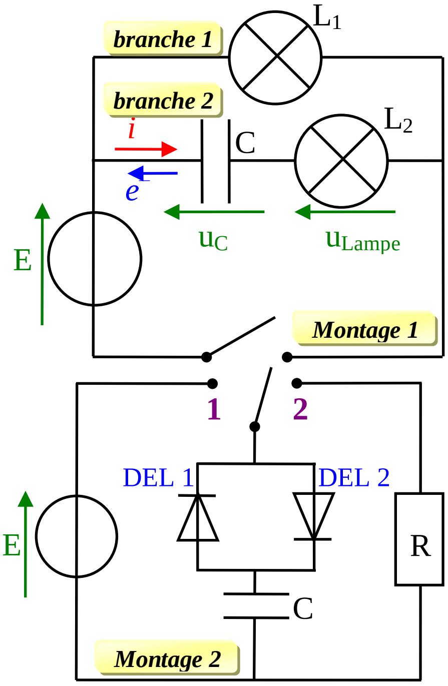
1.1. Description et symbole



Un **condensateur** est constitué de deux conducteurs, appelés ***armatures***, dont les surface en regard sont séparées par un isolant appelé le ***diélectrique***.

Rem. : Les électrons ne peuvent pas traverser le diélectrique (isolant).

1.2. Le condensateur en courant continu



1.2.1. Charge du condensateur

Lorsque l'on ferme l'interrupteur (Montage 1) la lampe L_1 brille instantanément et reste éclairée : le courant passe de façon permanente.
En revanche la lampe L_2 ne brille que de façon transitoire ; elle s'éteint après un court instant : le courant passe de façon transitoire.

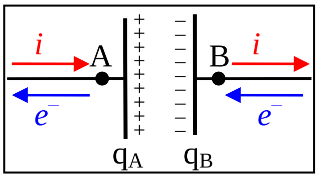
Appliquons la loi d'additivité des tensions (ou loi des mailles) au circuit comportant L_2 : $E = u_C + u_{Lampe}$. Lorsque la lampe L_2 est éteinte alors $u_{Lampe} = 0$ et donc $\mathbf{u_C = E}$. L'intensité circulant dans le circuit est alors nulle $\boldsymbol{i = 0}$.

1.2.2. Décharge du condensateur

Lorsque l'interrupteur (Montage 2) est en position 1, la DEL 2 s'éclaire un court instant puis s'éteint : le condensateur s'est chargé.
Lorsque l'interrupteur est en position 2, la DEL 1 s'éclaire un court instant puis s'éteint : le condensateur s'est déchargé.
En conclusion, le condensateur accumule de l'énergie puis la restitue.
Le courant lors de la décharge est dans le sens contraire du courant de charge.

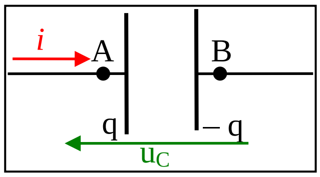
1.2.3. Les charges portées par les armatures

Lors de la charge, la borne du condensateur (borne A sur le schéma) reliée au potentiel le plus élevé se charge positivement : des électrons « fuient » l'armature A. À l'inverse la borne B se charge négativement : des électrons s'accumulent sur la borne B. A l'intérieur du condensateur il n'y a pas de déplacement de charges. Au cours de la charge du condensateur le potentiel de l'armature A devient positif alors que le potentiel de l'armature B devient négatif : la différence de potentiel $u_C = V_A – V_B$ augmente.



Les charges des armatures A et B vérifient l'égalité : $q_A = – q_B$, à tout instant.

1.3. Relation charge-intensité



Convention d'orientation **:** on oriente le circuit de A vers B. i est algébrique : si le courant circule dans le sens choisi alors $i > 0$; s'il circule dans le sens inverse alors $i < 0$.
On place u_C tel que sur le schéma ci-contre. Notons q la charge de l'armature A.

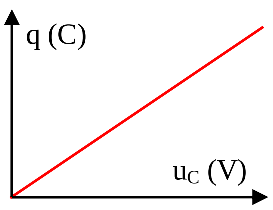
Le courant i correspond au débit d'électrons circulant dans le circuit. Entre les instants t et t + dt, la charge de l'armature A augmente de dq donc la charge traversant le circuit est égale à dq ainsi :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

i(t) : intensité à l'instant t (A)
q : charge en coulomb (C)
t : temps en (s)

Rem. : si $i > 0$ alors $\frac{dq}{dt} > 0$ (q ↑) : le condensateur se charge ; si $i < 0$ alors $\frac{dq}{dt} < 0$ (q ↓) : décharge du condensateur.

1.4. Relation charge-tension



On remarque, en traçant la charge q portée par l'armature d'un condensateur en fonction de la tension u_C à ses bornes, que la charge q est proportionnelle à u_C. Le coefficient de proportionnalité, nommé capacité, est noté C. Il est caractéristique d'un condensateur et s'exprime en farad (F).

$$q(t) = C \times u_C(t)$$

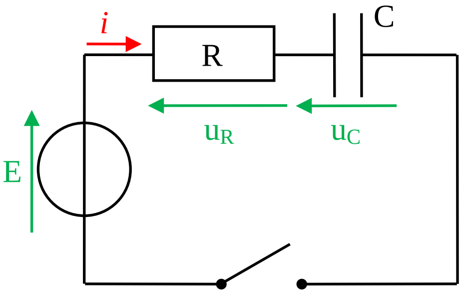
q(t) : charge en coulomb (C)
C : capacité du condensateur en farad (F)
$u_C(t)$: tension aux bornes du condensateur (V)

2. Le dipôle RC

2.1. Réponse d'un circuit RC à un échelon montant de tension : charge du condensateur

2.1.1. Montage expérimentale

On envisage un dipôle RC, c'est-à-dire l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C.

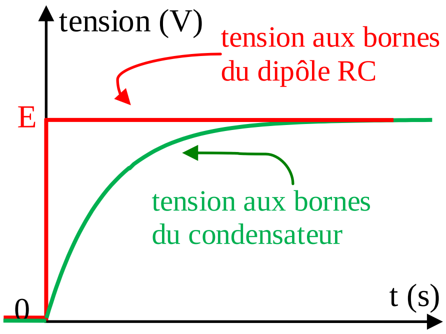


2.1.2. Observations expérimentales

A l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur. La tension aux bornes du dipôle RC passe alors instantanément de 0 à E : c'est un échelon de tension.

La tension aux bornes du condensateur, en revanche, ne subit pas de discontinuité : elle passe de 0 à E également, mais pas instantanément. On note l'existence d'un ***régime transitoire***, pendant lequel la tension u_C augmente, et d'un ***régime permanent*** (ou ***régime stationnaire***), pendant lequel la tension u_C est constante et égale à E.

2.1.3. Étude théorique



Étudions le cas évoqué, et établissons l'expression de la tension u_C.
D'après la loi d'additivité des tensions : $E = u_R(t) + u_C(t)$.

Or $u_R = R\times i$ (loi d'Ohm) et $i = \frac{dq}{dt}$; avec $q(t) = C\times u_C(t)$ donc $i = \frac{d(C\times u_C)}{dt}$;

puisque C est indépendant de t alors $i = C\times\frac{du_C}{dt}$ et par suite : $u_R = RC\times\frac{du_C}{dt}$.

Ainsi la tension u_C, aux bornes du condensateur, est une solution de l'équation différentielle : $RC\times\frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Cette dernière peut se mettre sous la forme : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}\times u_C = \frac{1}{RC}\times E$ On pose $\tau = RC$ en effet :

$\frac{du_C}{dt}$ est homogène à une tension sur un temps, donc $\frac{u_C}{RC}$ également. Par conséquent RC est homogène à un temps.

On montre mathématiquement que cette équation différentielle du premier ordre à coefficient constant et second membre constant possède comme solution : $u_C = A.\, e^{-\frac{t}{\tau}} + B$, avec $\tau = RC$.

Conditions aux limites :

- à t = 0, la tension u_C aux bornes du condensateur est nulle : $0 = A.e^0 + B$ donc $A = -B$.
- Lorsque t tend vers l'infini, u_C tend vers E ($e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$) : $\lim\limits_{t\to\infty} u_C(t) = E = A\times 0 + B$. Ainsi $B = E$ et $A = -E$.

Solution de l'équation différentielle :

Par conséquent : $u_C = -E.e^{-\frac{t}{\tau}} + E$ que l'on peut écrire : $\boxed{u_C(t) = E\times(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

Dérivons $u_C(t)$ par rapport au temps : $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ et réinjectons $\frac{du_C(t)}{dt}$ dans l'équation différentielle :

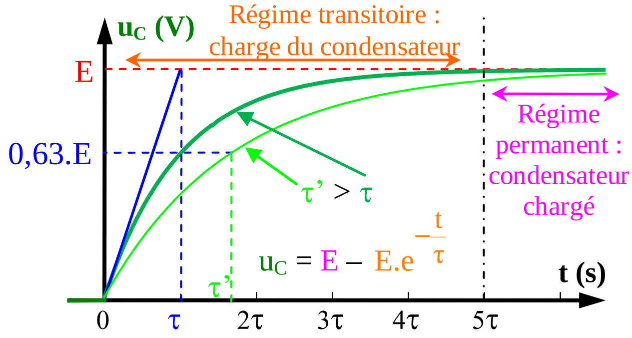
$\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{RC}.E.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \cancel{\frac{E}{RC}} - \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \cancel{\frac{E}{RC}} \Leftrightarrow \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow \tau = R.C$: constante de temps (s)

Analyse dimensionnelle : RC est homogène à un temps : $[RC] = [R].[C] = \frac{\cancel{[U]}}{[I]}.\frac{[Q]}{\cancel{[U]}} = \frac{\cancel{[I]}.[t]}{\cancel{[I]}} = [t] = T$

2.1.4. Influence de la constante de temps

Plus τ est élevé, plus le condensateur met du temps à se charger. τ augmente lorsque :

- la résistance R du conducteur ohmique augmente
  physiquement : plus R est élevée, plus le courant *i* qui circule à travers la résistance est faible. En conséquence le débit de charge est plus faible et donc il faut plus de temps pour charger complètement le condensateur.
- la capacité C du condensateur augmente
  physiquement : plus C est élevée plus la charge Q du condensateur, soumis à une tension E à ses bornes, est élevée (puisque Q = C×E) et donc plus le nombre de charges portées par une armature est élevé : il faut plus de temps pour charger le condensateur !



Détermination graphique de la constante de temps τ [1] **:**

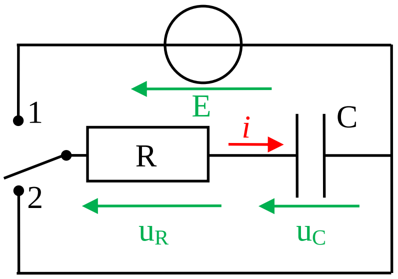
1ère méthode : La tangente à la courbe à t = 0, coupe l'asymptote u = E au point d'abscisse τ (annexe 2).

2ème méthode : Pour $t = \tau$, $u_C = (1 - \frac{1}{e}).E$ = 0,63.E (63 % de E).

On considère que le condensateur est pratiquement chargé si la tension u_C est au moins égale à 99% de la tension finale E. Cette situation est vérifiée pour $t > 5.\tau$ (annexe 3)

2.2. Échelon descendant de tension : décharge du condensateur

2.2.1. Montage expérimentale

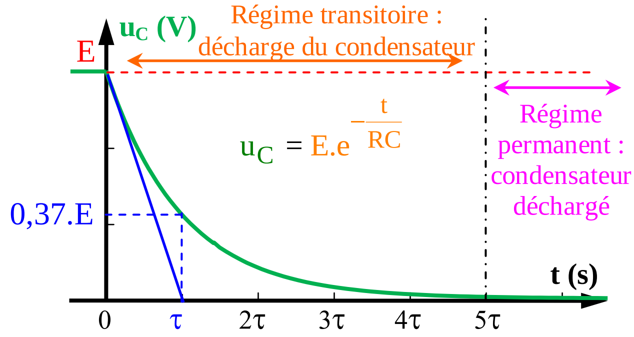


On charge un condensateur sous une tension E (interrupteur en position 1).
Pour étudier la décharge, on bascule l'interrupteur en position 2, à l'instant t = 0.

2.2.2. Observations expérimentales

La tension aux bornes du dipôle RC passe instantanément de E à 0.

La tension aux bornes du condensateur ne subit pas de discontinuité : elle passe de E à 0, mais pas instantanément. On note l'existence d'un ***régime transitoire***, pendant lequel la tension u_C diminue, et d'un ***régime permanent*** (***ou stationnaire***), pour lequel la tension u_C est constante et égale à 0.



2.2.3. Étude théorique

Établissons l'expression de la tension u_C dans le cas évoqué.
D'après la loi d'additivité des tensions : $0 = u_R + u_C$.
Ainsi : $R.i + u_C = 0$ avec $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ car $q = C.u_C$

La tension aux bornes du condensateur satisfait à l'équation : $RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$: solution du type : $u_C(t) = A.e^{-\alpha t} + B$

Conditions aux limites : $u_C(\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$ et $u_C(0) = E \Rightarrow A = E$ donc $u_C(t) = E.e^{-\alpha t}$ ainsi $\frac{du_C}{dt} = -E.\alpha.e^{-\alpha t} = -\alpha.u_C(t)$

Solution de l'équation différentielle : $RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow -RC.\alpha.u_C + u_C = 0$ soit $\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ avec $\tau = RC$!

La tension aux bornes du condensateur s'écrit donc : $\boxed{u_C = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec $\tau = RC$.

2.2.4. La constante de temps

Détermination graphique de la constante de temps τ :

1ère méthode : la tangente à la courbe à t = 0, coupe l'axe des abscisses (asymptote u = 0) à $t = \tau$ (annexe 2).

2ème méthode : Pour $t = \tau$, $u_C = \frac{1}{e}.E$ = 0,37.E

On considère que le condensateur est pratiquement déchargé si la tension u_C est inférieure ou égale à 1% de la tension initiale E. Cette situation est vérifiée pour $t > 5.\tau$ (annexe 4)

2.3. Expressions des autres grandeurs électriques

	charge du condensateur (initialement déchargé)		décharge du condensateur (initialement chargé Q = C.E)	
tension aux bornes du condensateur : $u_C(t)$	$u_C = E.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$		$u_C = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$	
charge portée par une armature : **$q(t) = C.u_C(t)$**.	$q(t) = C.E.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$		$q(t) = C.E.e^{-\frac{t}{\tau}}$	
	$q(0^-) = 0$	$q(0^+) = 0$	$q(0^-) = C.E$	$q(0^+) = C.E$
intensité circulant dans le circuit : **$i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$**	$i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$		$i(t) = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$	
	$i(0^-) = 0$	$i(0^+) = \frac{E}{R}$	$i(0^-) = 0$	$i(0^+) = -\frac{E}{R}$

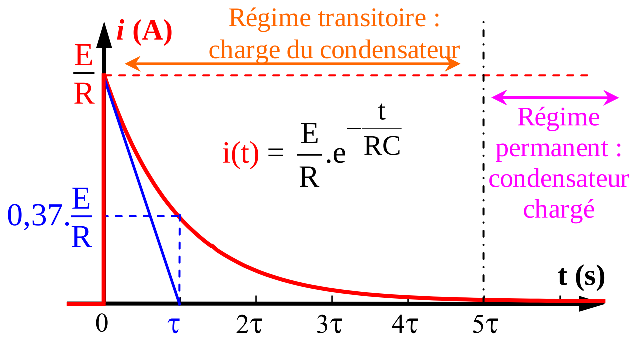
Lors de la charge : à $t = 0^+$, $u_R(t) + u_C(t) = E$ et $u_C(0^+) = 0$, donc $u_R(0^+) = E$ et donc $R.i(0^+) = E$: $i(0^+) = \frac{E}{R}$

Lors de la décharge : à $t = 0^+$, $u_R(t) + u_C(t) = 0$ et $u_C(0^+) = E$, donc $u_R(0^+) + E = 0$ et donc $R.i(0^+) = -E$: $i(0^+) = -\frac{E}{R}$

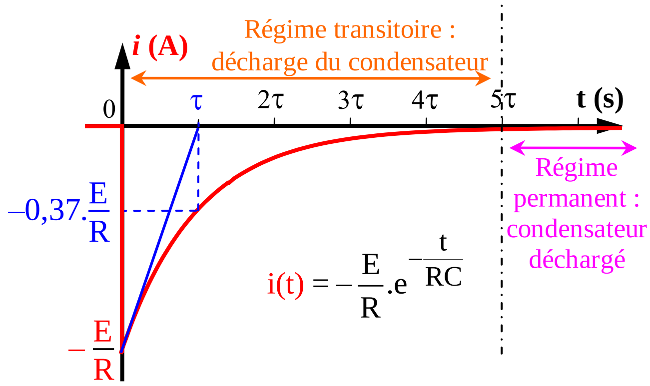
[1] Détermination de la constante de temps : http://www.spc.ac-aix-marseille.fr/phy_chi/Menu/Activites_pedagogiques/livre_TS/31_RC/ctetempsRC.swf

Rappel : si $i > 0$ alors le courant circule dans le sens d'orientation choisi. Si $i < 0$, le courant circule dans le sens opposé. Lors de la charge, le courant circule dans le sens d'orientation choisi ; lors de la décharge le courant circule dans le sens opposé !

La charge portée par une armature ne subit pas de discontinuité. Il y a continuité de la charge **et de la *tension***.
En revanche l'intensité qui circule dans le circuit subit une discontinuité. À $t_0 = 0$, elle passe instantanément, à la fermeture de l'interrupteur, de 0 à $I_{max} = \frac{E}{R}$ dans le cas de la charge et de 0 à $-\frac{E}{R}$ pour la décharge.



discontinuité de l'intensité *i* traversant le circuit lors de la charge



discontinuité de l'intensité *i* traversant le circuit lors de la décharge

3. *Énergie stockée par un condensateur*

Comme nous l'avons vu en préambule de ce chapitre, le condensateur permet de stocker de l'énergie électrique au cours de la charge. Cette énergie peut être restituée ensuite au cours de la décharge.
Quelle est l'expression de cette énergie ?

La puissance électrique instantanée échangée par le condensateur avec le circuit est : $\mathscr{P}_e(t) = u_C(t)\times i(t) = \dfrac{d\mathscr{E}_{élec}}{dt}$

Entre t et t + dt, l'énergie échangée entre le condensateur et le circuit est donc : $d\mathscr{E}_{élec} = \mathscr{P}_e(t).dt = u_C(t)\times i(t)\times dt$

Ainsi : $d\mathscr{E}_{élec} = u_C(t)\times C.\dfrac{du_C(t)}{dt}\times dt = C.u_C(t).du_C(t) = d(\frac{1}{2}C.u_C(t)^2)$

Lors de la charge (condensateur initialement déchargé), par identification : $\mathscr{E}_{élec} = \frac{1}{2}.C.u_C(t)^2$

> L'énergie électrique stockée par un condensateur est : $\mathscr{E}_{élec}(t) = \frac{1}{2}.C.u_C(t)^2 = \frac{1}{2}.\dfrac{q(t)^2}{C}$

L'énergie électrique maximale stockée par le condensateur, chargé sous une tension E, est donc : $\mathscr{E}_{max} = \frac{1}{2}.C.E^2$.

Cette énergie peut également s'exprimer (Q = C.E) de la façon suivante : $\mathscr{E}_{max} = \frac{1}{2}.Q.E = \frac{1}{2}.\dfrac{Q^2}{C}$

Les échanges énergétiques ne peuvent pas s'effectuer instantanément (une puissance ne peut pas être infinie). L'énergie ne subit donc pas de discontinuité. En conséquence, comme nous l'avons signalé dans les paragraphes 2.1.2 ci-dessus et 2.2.2, ni la tension ni la charge portée par une armature ne subissent de discontinuité.

Rem. : dans le cas du dipôle RC, l'énergie stockée par le condensateur lors de la charge est dissipée sous forme d'effet Joule par la résistance lors de la décharge !

http://cpge.pissarro.free.fr/VideosPhysique/CondensationElectricite.html
http://www.spc.ac-aix-marseille.fr/phy_chi/Menu/Activites_pedagogiques/livre_TS/31_RC/condensateur.swf
http://perso.orange.fr/gilbert.gastebois/java/rlc/rlclib/rlc.html (Cliquer sur RC et t fixe pour voir l'influence de R et C sur la constante de temps τ et sur la charge ou la décharge du condensateur)
http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/condo2.html
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Transitoire/Condensateur_flash.htm
http://webetab.ac-bordeaux.fr/Etablissement/SudMedoc/physique_chimie/terminale%20S/terminale_s_fichiers/RC%20Circuits.htm
http://jf-noblet.chez-alice.fr/capa/index.htm

Annexe 1

La démonstration suivante n'est pas à connaître pour l'épreuve de physique au bac.

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}\times u_C = \frac{1}{RC}\times E$$

1. Recherche d'une solution générale à l'équation sans second membre :

$$\frac{du_{Csol\ gén}}{dt} + \frac{1}{RC}\times u_{Csol\ gén} = 0 \Leftrightarrow \frac{du_{Csol\ gén}}{dt} = -\frac{1}{RC}\times u_{Csol\ gén} \Leftrightarrow \frac{du_{Csol\ gén}}{u_{Csol\ gén}} = -\frac{dt}{RC}$$

On reconnait $\frac{du_{Csol\ gén}}{u_{Csol\ gén}}$ l'expression différentielle du logarithme népérien de u_C : $d(\ln u_{Csol\ gén}) = \frac{du_{Csol\ gén}}{u_{Csol\ gén}}$

La solution générale est de la forme $\ln u_{Csol\ gén} = -\frac{t}{RC} + A$ donc $u_{Csol\ gén} = A.e^{-\frac{t}{RC}}$ (A est une constante)

2. Recherche d'une solution particulière :

Une solution triviale de cette équation différentielle est $u_{Csol\ part} = E$. En effet cette solution correspond physiquement au régime permanent, lorsque le condensateur est totalement chargé.

3. La solution de l'équation différentielle est donc $u_C = u_{Csol\ gén} + u_{Csol\ part} = A.e^{-\frac{t}{RC}} + E$.

4. Conditions aux limites :

si t = 0 alors $u_C(0) = 0$ ainsi : $u_C = A + E = 0$ donc $A = -E$ et finalement $u_C = E\times(1-e^{-\frac{t}{RC}})$;

si $t\rightarrow\infty$ alors $u_C(t)\rightarrow E$; en effet $e^{-\frac{t}{RC}}\rightarrow 0$

Annexe 2

Montrons que la tangente à la courbe à t = 0 coupe l'asymptote u = E pour t = τ.

L'équation caractérisant la différence de potentiel entre les armatures du condensateur est : $u_C = E - E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

La pente de la courbe est $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ à l'instant t et donc pour t = 0 la pente de la courbe est $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau}$

L'équation de la tangente à la courbe est donc $u = \frac{E}{\tau}.t$ Ainsi u = E pour t = τ !

Annexe 3

Montrons que si t > 5.τ alors u_C > 0,99.E (99 % de E) – Charge du condensateur

L'équation caractérisant la différence de potentiel entre les armatures du condensateur est : $u_C = E - E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ainsi $E - E.e^{-\frac{t}{\tau}} > 0{,}99.E \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} > 0{,}99 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} < 0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} < \text{Ln } 0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} < \text{Ln }\frac{1}{100} \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} < -\text{Ln } 100$

$\Leftrightarrow \frac{t}{\tau} > \ln 100 \Leftrightarrow t > \ln 100 \times \tau$; Or ln 100 = 4,61.

Le multiple entier de τ le plus proche qui satisfait à la condition u_C > 0,99.E est donc bien 5.τ.

En effet si t = 5.τ alors $u_C = E(1-e^{-5}) = 0{,}993.E$ soit 99,3 % de E.

Annexe 4

Montrons que si t > 5.τ alors u_C > 0,01.E (1 % de E) – Décharge du condensateur

L'équation caractérisant différence de potentiel entre les armatures du condensateur est : $u_C = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ainsi $E.e^{-\frac{t}{\tau}} > 0{,}01.E \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} > 0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} < \ln 0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} < \ln\frac{1}{100} \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} < -\ln 100 \Leftrightarrow t > \ln 100 \times \tau$.

Le multiple entier de τ le plus proche qui satisfait à la condition u_C > 0,01.E est donc bien 5.τ.

En effet si t = 5.τ alors $u_C = E.e^{-5} = 0{,}007.E$ soit 0,7 % de E.