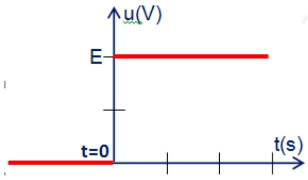
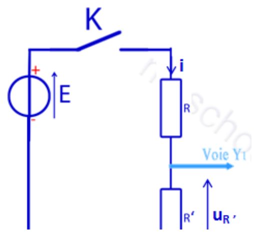
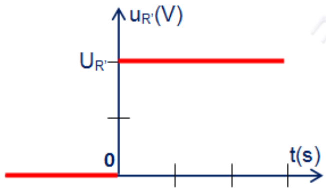
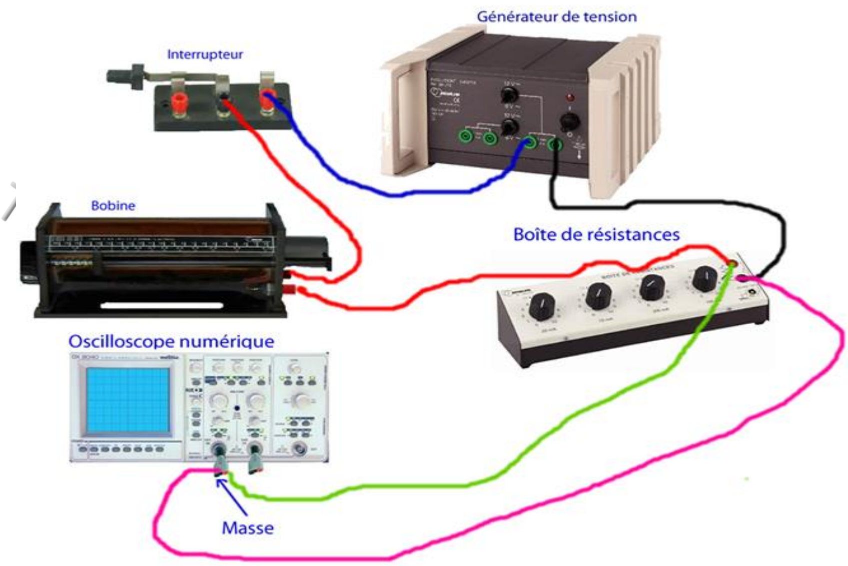
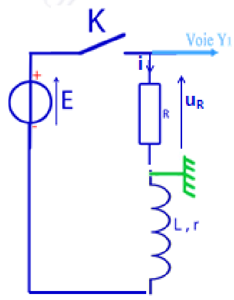
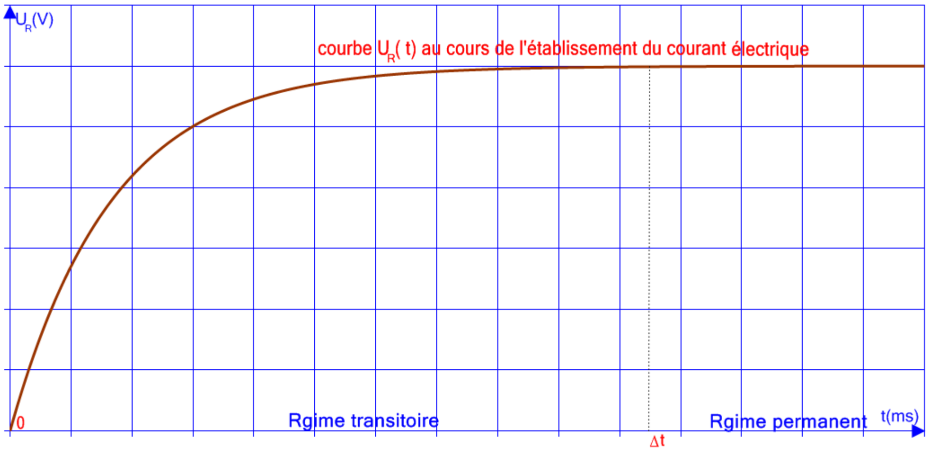
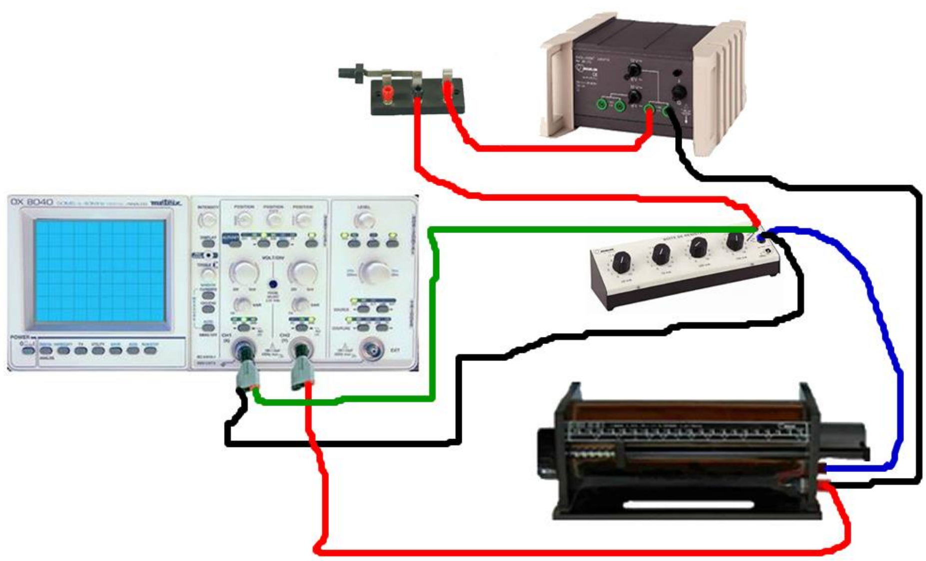
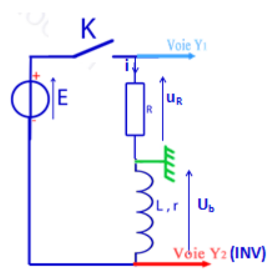
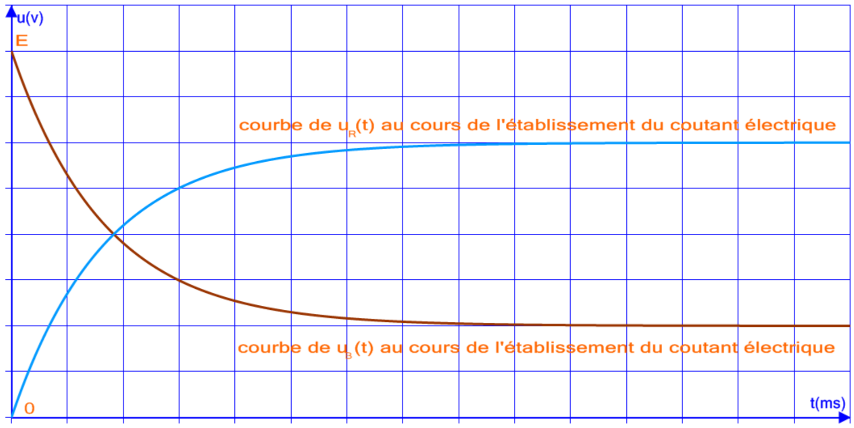
Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension

Titre	Description	Remarques
I- Introduction	**1- Le dipôle RL** est une association en série d'une bobine et d'un conducteur ohmique (ou résistor) :  2- **L'échelon de tension** : est le passage instantané d'une tension de la valeur 0 à une valeur constante non nulle.  u(t) est une tension appliquée aux bornes du dipôle RL, à t=0 s on ferme l'interrupteur. Si : * Pour t<0 ; u =0 * Pour $t \geq 0$; u = E. On dit alors qu'on applique un échelon de tension au dipôle RL.	Un dipôle RL est soumis à un échelon de tension si la tension entre ses bornes passe brusquement de zéro à une valeur constante E.
II- Étude expérimentale	1-**Manipulations :** a- **Manipulation 1** : on considère le circuit électrique suivant :  On réalise l'acquisition de la tension aux bornes du résistor R' on obtient le chronogramme suivant :  On remarque que la tension $u_{R'}$ passe instantanément à sa valeur maximale. b- **Manipulation 2** : on considère le circuit électrique suivant : 	Schéma: 

Titre	Description	Remarques
	On réalise l'acquisition de la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique, en fermant l'interrupteur K, on obtient sur l'écran de l'oscilloscope le chronogramme suivant :  On remarque que : la tension u_R augmente progressivement et après un retard temporel elle atteint sa valeur maximale qui est égale à U_{Rp} ou U_{Rmax} . **Conclusion** : La présence de la bobine dans le circuit a créé ce retard temporel Δt. i(t) a la même allure que U_R(t) donc le courant électrique s'établit avec un retard temporel Δt.	.La bobine ne se comporte pas comme un conducteur ohmique . La bobine s'oppose à l'établissement du courant électrique en crayant un courant d'auto-induction.
	C- Manipulation 3 : on considère le circuit électrique suivant :  On réalise l'acquisition des tensions u_B(t) et u_R(t), on obtient le chronogramme suivant sur l'écran de l'oscilloscope :	 On appuie sur le bouton inverse de la voie 2 car la tension acquise sur cette voie est – u_B ; comme vous remarquez sur le schéma du circuit : $u_{voie\ Y1} = U_R$ et $u_{voie\ Y2} = - U_B$

Titre	Description	Remarques



On remarque que lorsque u_R atteint sa valeur maximale, la tension aux bornes de la bobine u_B atteint sa valeur minimale (nulle pour une bobine idéale).

III-Étude théorique

1- Équation différentielle en i(t) :

(on doit représenter les flèches des tensions avant d'établir l'équation différentielle).
A la date t=0, on ferme l'interrupteur K. D'après la loi des mailles :

$$u_R + u_B - E = 0 \text{ avec } u_R = Ri \text{ donc } Ri + u_B = E$$

$$\text{Or } u_B = L\frac{di}{dt} + ri \text{ donc } Ri + ri + L\frac{di}{dt} = E\text{;}$$

$$\text{donc } L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E \text{ ou } \frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{L}{R+r} \text{ donc } \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{L}$$

Remarque : Équation différentielle en u_R(t)

Pour avoir l'équation différentielle en u_R(t), il suffit de multiplier l'équation précédente par R.

$$\text{on a } \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{L} \text{ donc } R\left(\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i\right) = R\frac{E}{L}$$

$$\text{or } Ri = u_R \text{ donc } \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{\tau}u_R = \frac{RE}{L}$$

Remarque : Équation différentielle en u_B(t) (n'est pas demandé lors de l'examen du bac).
Pour avoir l'équation différentielle en U_B(t), il suffit de remplacer U_R par E- u_B dans l'équation différentielle en u_R(t).

$$u_R + u_B - E = 0 \Rightarrow u_R = E - u_B \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = -\frac{du_B}{dt} \text{ or } \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{\tau}u_R = \frac{RE}{L}$$

$$\Rightarrow -\frac{du_B}{dt} + \frac{1}{\tau}(E - u_B) = \frac{RE}{L} \Rightarrow \frac{du_B}{dt} + \frac{1}{\tau}u_B = -\frac{RE}{L} + \frac{1}{\tau}E$$

$$\Rightarrow \frac{du_B}{dt} + \frac{1}{\tau}u_B = -\frac{RE}{L} + \frac{(R+r)}{L}E \Rightarrow \frac{du_B}{dt} + \frac{1}{\tau}u_B = \frac{rE}{L}$$

Titre	Description	Remarques

2- Solution de l'équation différentielle :

L'équation différentielle précédente a pour solution : $i(t) = A - Be^{-\alpha t}$.

Avec A ; B et α sont des constantes positives. Déterminons A ; B et α :

<u>1ère étape</u> : l'intensité du courant électrique est nulle a t=0 : i(0) = 0.

Donc $A - Be^{0} = 0 \Leftrightarrow A - B = 0$ donc B= A d'où $i = A - Ae^{-\alpha t}$.

$2^{ème}$ *étape* : lorsque $t \to +\infty$; $i = I_p =$ *constante donc* $di/dt = 0$

$$Donc\ (R + r)i = E\ donc\quad i = I_p = \frac{E}{(R + r)}.$$

$i(+\infty) = A - Ae^{-\infty} = I_p\ or\ e^{-\infty} = 0.$

$A - 0 = I_p d'où\ A = B = I_p = \dfrac{E}{(R + r)}.$

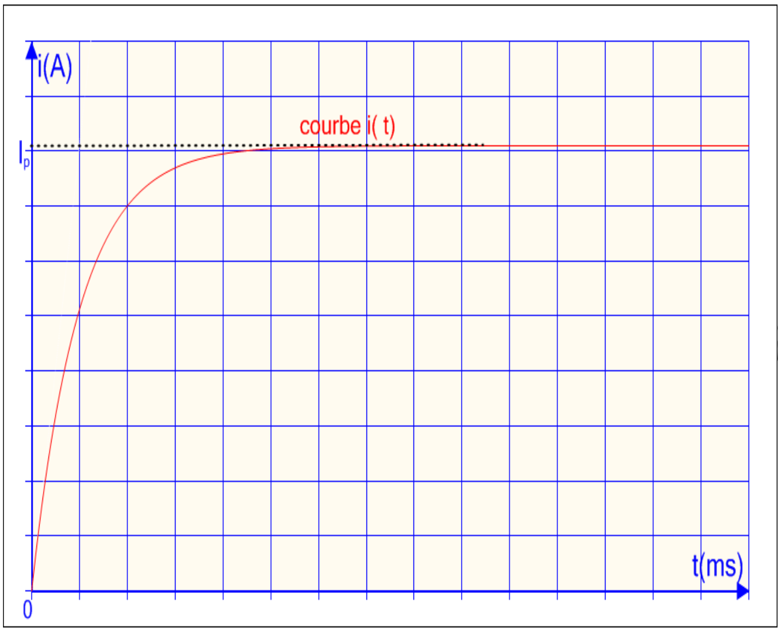
$Donc\ i(t) = I_p - I_p e^{-at}.$

$i(t) = I_p(1 - e^{-at}) = \dfrac{E}{(R + r)}(1 - e^{-at}).$

III Étude théorique

3-**Expression et graphe de i(t) ; de u_R(t) et de u_B(t) :**

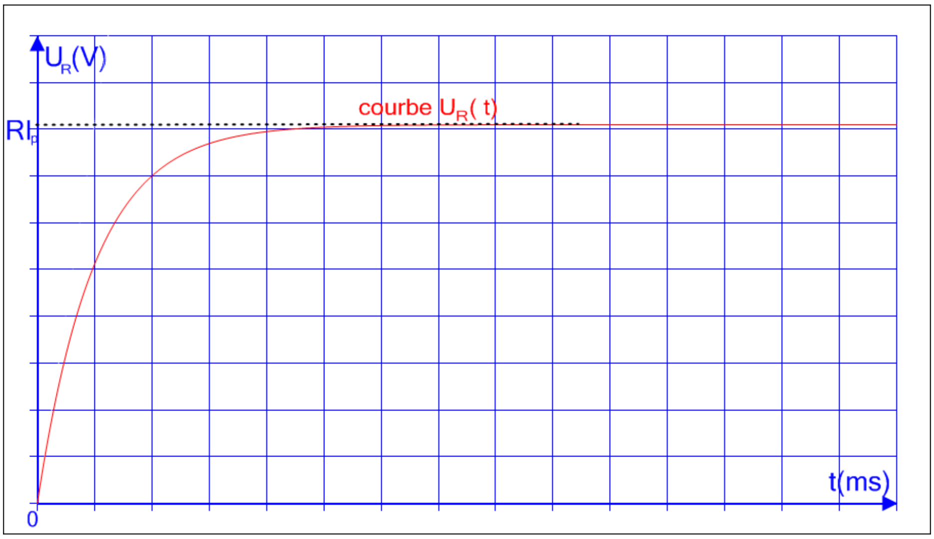
a- Expression de i(t) : $i(t) = \dfrac{E}{(R + r)}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.



Titre	Description	Remarques

b- Expression de $u_R(t)$:

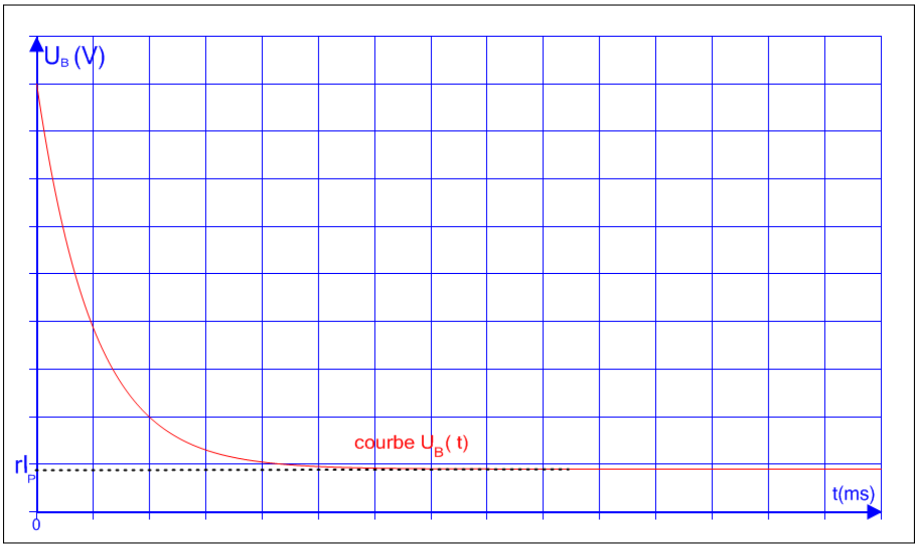
$$u_R(t) = \mathrm{R}\,i(t) = \frac{RE}{(R+r)}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \ .$$



c- Expression de $u_B(t)$:

$$u_B(t) = E - u_R(t) = E - \frac{RE}{(R+r)}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_B(t) = \frac{E}{R+r}\left[(R+r) - R(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\right] = \frac{E}{(R+r)}(r + \mathrm{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Titre	Description	Remarques

IV- La constante de temps d'un dipôle RL

a- **Définition** :

La constante de temps τ est une grandeur caractéristique du dipôle RL, elle nous renseigne sur la rapidité avec laquelle s'effectue l'établissement ou la rupture du courant électrique.

b- Unité de τ :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \text{ avec } \begin{cases} R = \frac{u_R}{i} \text{ donc R est en } \frac{V}{A} \text{ donc } \frac{1}{R+r} \text{ est en } \frac{A}{V} \\ u_L = L\frac{di}{dt} \text{ or } L = \frac{u_L}{(\frac{di}{dt})} \text{ donc L est en } \frac{V.s}{A} \end{cases} \text{ d'où } \tau \text{ est en } \frac{A}{V}.\frac{V.s}{A} = s$$

τ est exprimée en seconde donc τ est un temps.

c- Détermination de τ :

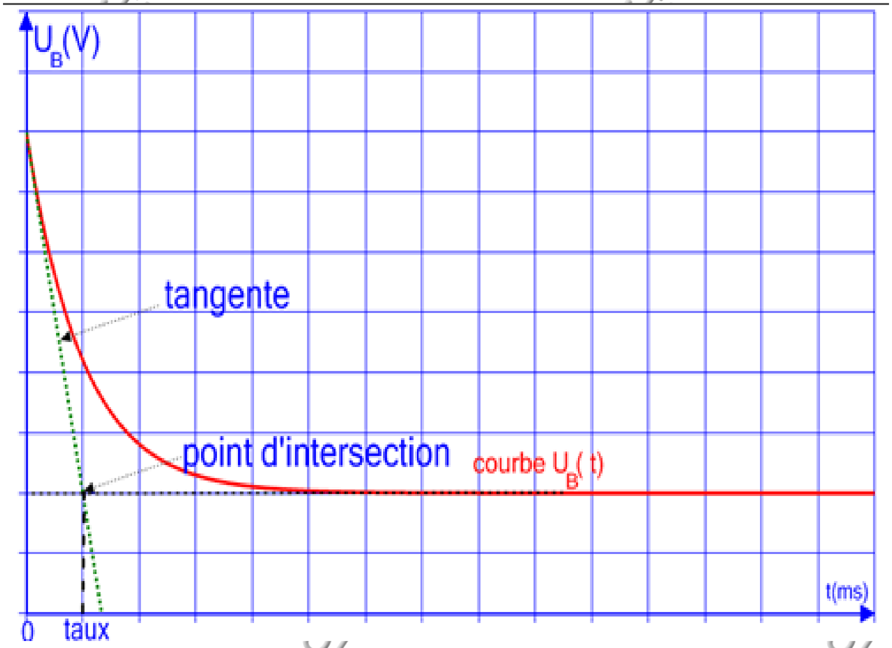
- **Par calcul :**

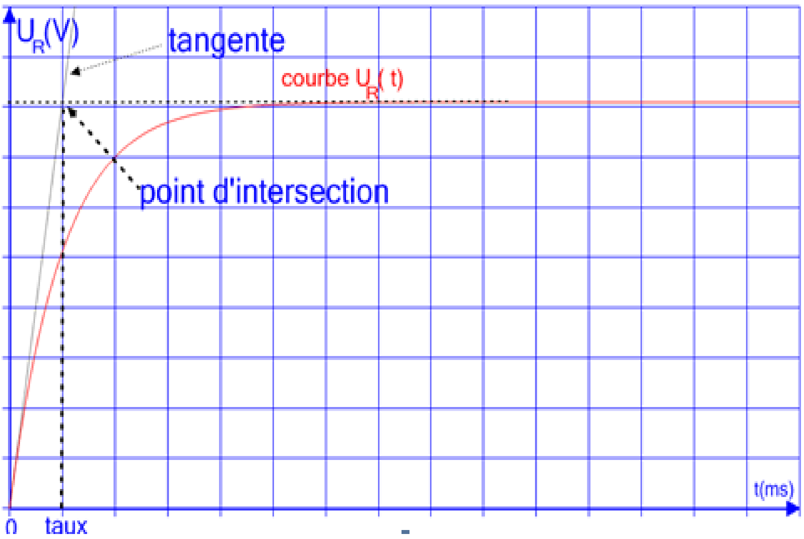
Ayant les valeurs de R, r(en Ω) et de L(en H), on peut calculer directement τ(en s) :

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

- **Graphiquement** :

1ère méthode (utilisation de la tangente à l'origine) : on peut montrer que τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de $u_B(t)$[de même pour $u_R(t)$ et $i(t)$] à la date t=0 avec l'asymptote (lorsque $t \to +\infty$).



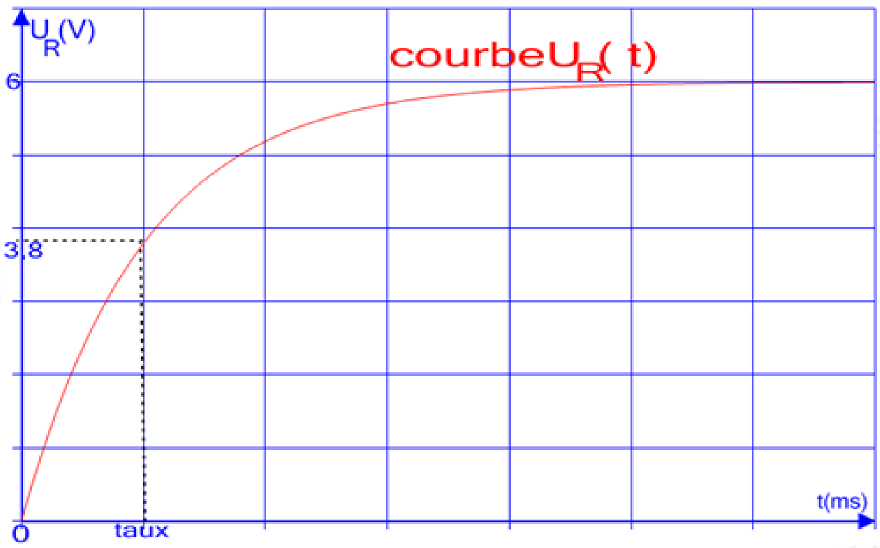


2ème méthode (lecture graphique) :

à partir du graphe de u_R(t). Pour t=τ, quelle est la valeur de u_R ?

$$u_R(\tau) = E(1 - e^{\frac{-\tau}{\tau}}) = E(1 - e^{-1}) = 0{,}63E \text{ car } e^{-1} = 0{,}37$$

Exemple : On a E= 6 V d'où 0,63.6 =3,78 V donc l'abscisse du point d'ordonnée 3,78 V est égale à τ.



Titre	Description	Remarques

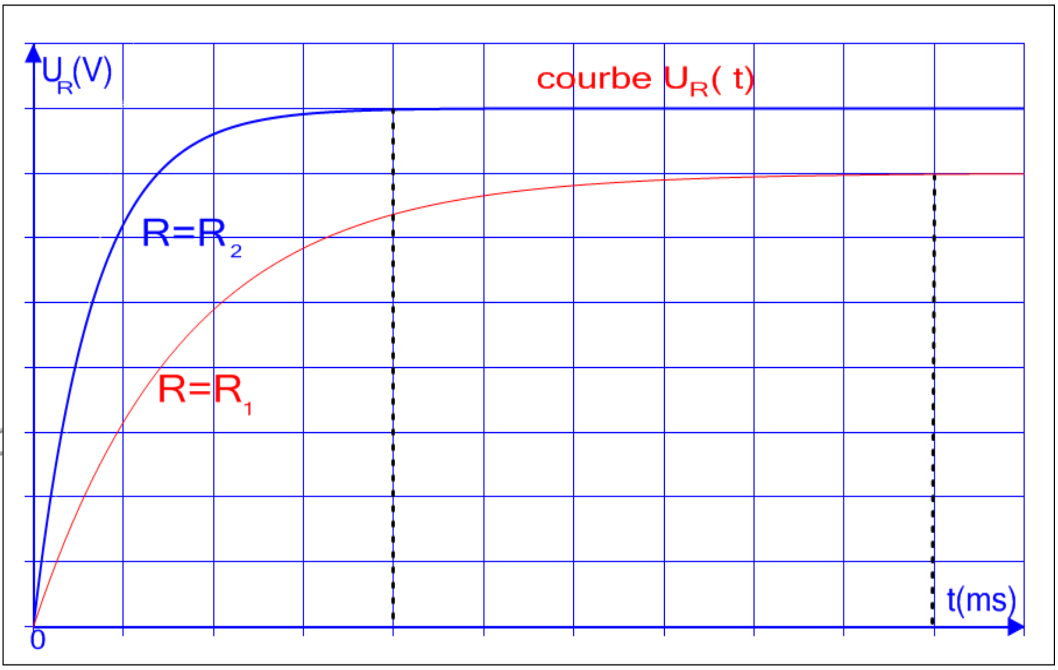
V- Influence de R,r et de L sur τ

1- Manipulation 1 :

On maintient la même bobine et on réalise deux expériences avec deux résistances différentes R_1 et R_2.

$$L = constante \begin{cases} Expérience\ 1 \rightarrow R = R_1 \\ Expérience\ 2 \rightarrow R = R_2 > R_1 \end{cases}$$

$$R_2 \succ R_1 \Rightarrow r + R_2 \succ r + R_1 \Rightarrow \frac{L}{r+R_2} \prec \frac{L}{r+R_1}\ donc\ \ \tau_2 \prec \tau_1$$



Attention :

$$R_2 \succ R_1 \Rightarrow \frac{r}{R_2} \prec \frac{r}{R_1} \Rightarrow 1 + \frac{r}{R_2} \prec 1 + \frac{r}{R_1} \Rightarrow \frac{r+R_2}{R_2} \prec \frac{r+R_1}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{r+R_2} \succ \frac{R_1}{r+R_1}\ donc\ \frac{R_2 E}{r+R_2} \succ \frac{R_1 E}{r+R_1}\ donc\ u_{R_2 \max} \succ u_{R_1 \max}$$

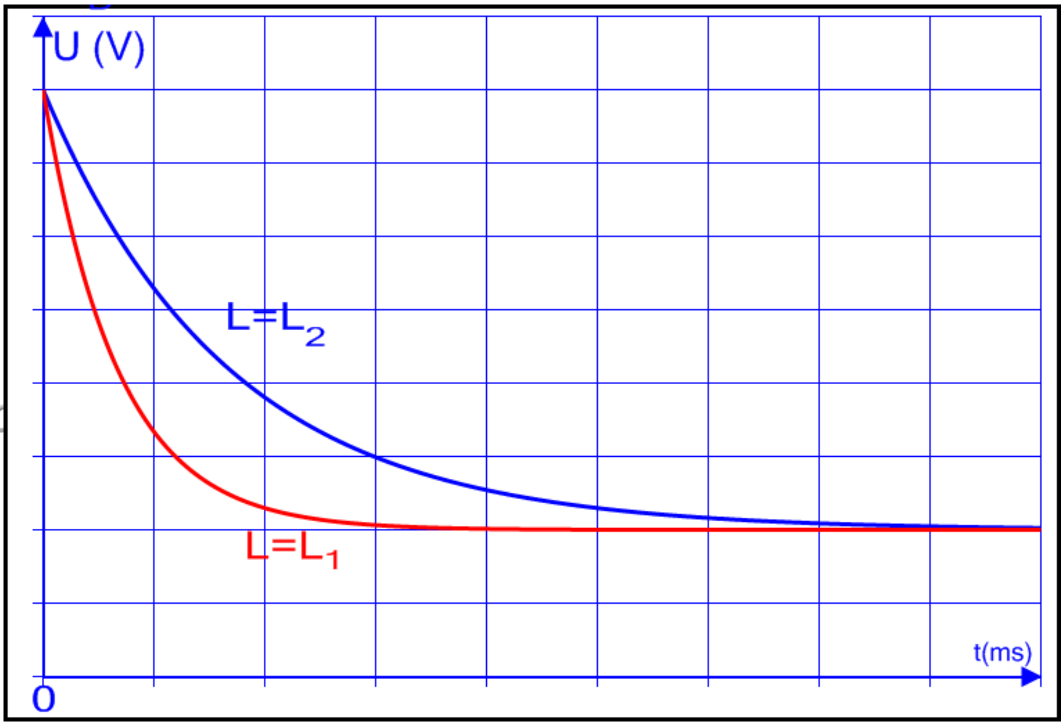
VI- Influence de R et de L sur τ

2- Manipulation 2 :

On maintient le même résistor et on réalise deux expériences avec deux bobines différentes.

$$R = constante \begin{cases} Expérience\ 1 \rightarrow L = L_1 \\ Expérience\ 2 \rightarrow L = L_2 > L_1 \end{cases}$$

$$L_2 \succ L_1 \Rightarrow \frac{L_2}{r+R} \succ \frac{L_1}{r+R}\ donc\ \ \tau_2 \succ \tau_1$$



Remarque :

$I_p = \frac{E}{R+r}$ donc L n’a pas d’effet sur I_p ni sur u_R.

Attention

En régime permanent :

- la bobine se comporte comme un résistor car en régime permanent i = Ip = constante et :

$$u_{B_p} = L.\frac{dI_p}{dt} + rI_p\ \ or\ \ \frac{dI_p}{dt} = 0\ donc :$$

$$u_{B_p} = rI_p\ comme\ la\ tension\ aux\ bornes\ d'un\ résistor$$