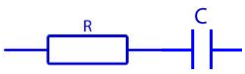
Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

Titre	Description	Remarques

I- Introduction

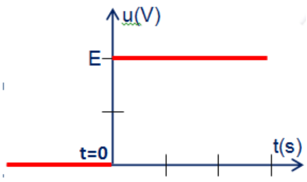
1- Le dipôle RC

est une association en série d'un condensateur et d'un conducteur ohmique (ou résistor) :



2- **L'échelon de tension** :

est le passage instantané d'une tension de la valeur 0 à une valeur constante non nulle.



u(t) est une tension appliquée aux bornes du dipôle RC, à t=0 s on ferme l'interrupteur. Si :

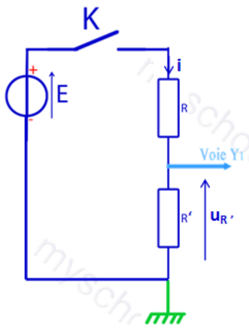
* Pour t<0 ; u =0
* Pour $t \geq 0$; u = E.

On dit alors qu'on applique un échelon de tension au dipôle RC.

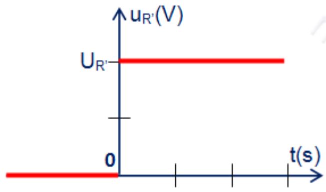
II- Étude expérimentale

3-**Manipulations :**

a- **Manipulation 1** : on considère le circuit électrique suivant :



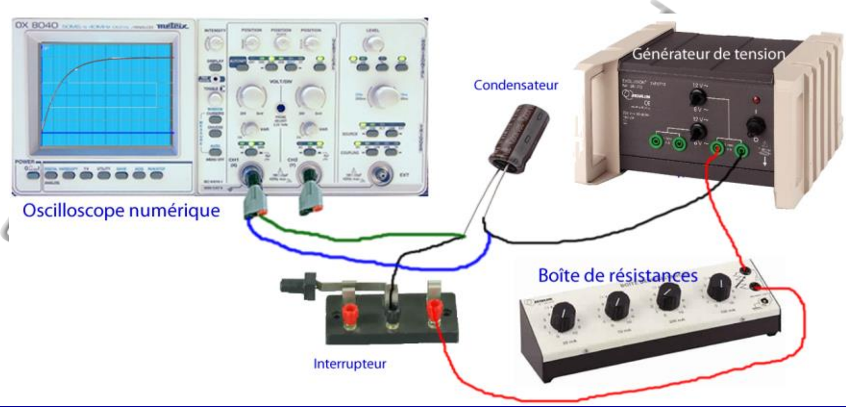
On réalise l'acquisition de la tension aux bornes du résistor R' on obtient le chronogramme suivant :

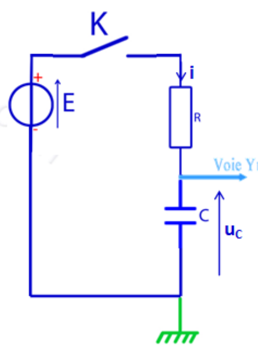


On remarque la tension $u_{R'}$ passe instantanément à sa valeur maximale.

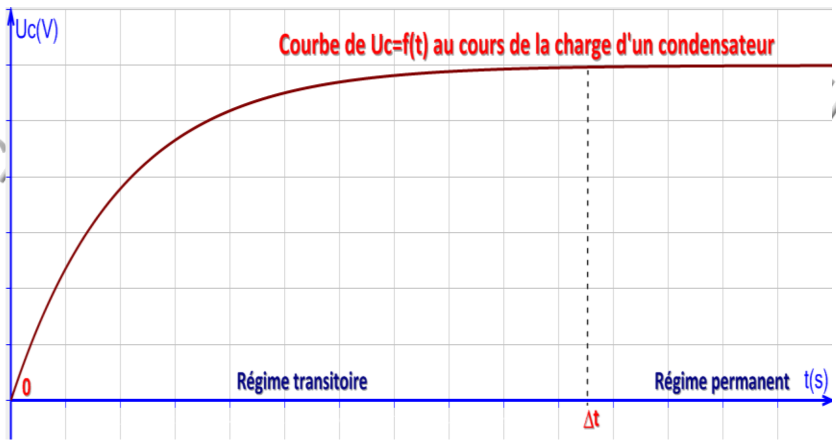
Remarques : Attention : l'oscilloscope est numérique

b- **Manipulation 2** : on considère le circuit électrique suivant :



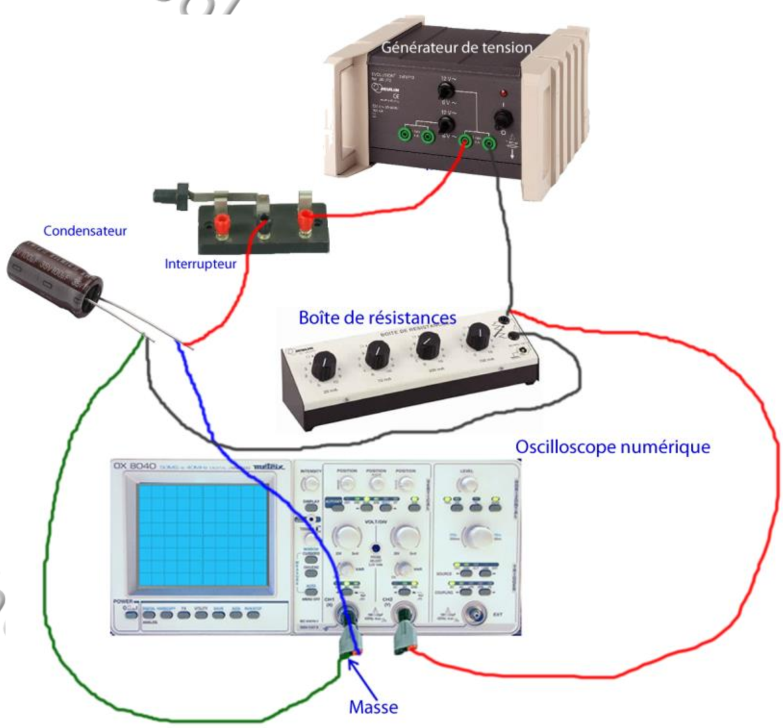


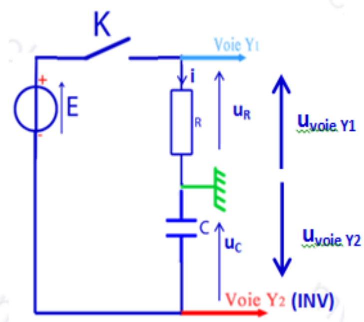
<table>
<tr><th>Titre</th><th>Description</th><th>Remarques</th></tr>
<tr>
<td>Étude expérimentale</td>
<td>
On réalise l’acquisition de la tension u_C aux bornes du condensateur, en fermant l’interrupteur K, on obtient sur l’écran de l’oscilloscope le chronogramme suivant :



On remarque que : la tension u_C augmente progressivement et après un retard temporel elle atteint sa valeur maximale qui est égale à E .

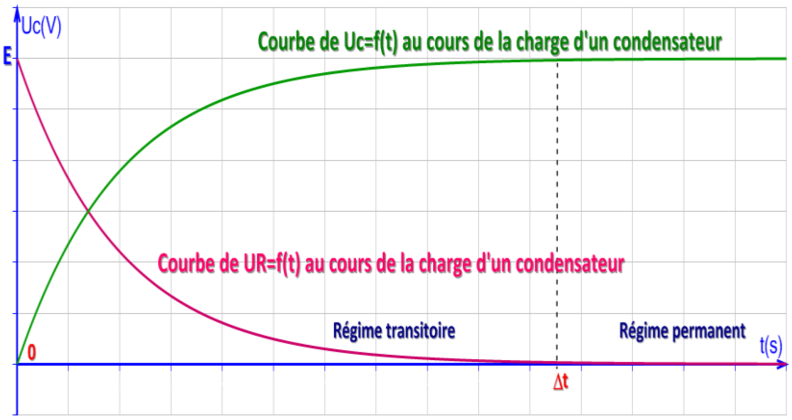
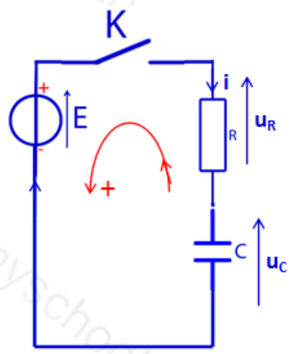
Conclusion : La présence du condensateur dans le circuit a créé ce retard temporel Δt.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Étude expérimentale</td>
<td>
c- **Manipulation 3** : on considère le circuit électrique suivant :



On réalise l’acquisition des tensions $u_C(t)$ et $u_R(t)$ on obtient le chronogramme suivant sur l’écran de l’oscilloscope :
</td>
<td>


On appuie sur le bouton inverse de la voie 2 car la tension acquise sur cette voie est $-u_C$; comme vous remarquez sur le schéma du circuit :

$u_{voie\ Y1} = u_R$ **et** $u_{voie\ Y2} = -u_C$
</td>
</tr>
</table>

Titre	Description	Remarques
	 On remarque que lorsque la tension u_C atteint sa valeur maximale, la tension aux bornes du résistor u_R atteint sa valeur nulle. **(c à d : lorsque le condensateur est complètement chargé u_C=E , u_R=0 ⇔ R.i = 0 et comme R≠0 donc i = 0 : un condensateur chargé ne laisse pas passer le courant électrique, il se comporte comme un interrupteur ouvert).** 3- **Conclusion** : La réponse d'un dipôle RC est la charge progressive du condensateur : charge avec un retard temporel.	
III- Étude théorique	1- **Équation différentielle en u_C :** (on doit représenter les flèches des tensions avant d'établir l'équation différentielle). Le condensateur est initialement déchargé, à la date t=0, on ferme l'interrupteur K. d'après la loi des mailles : u_R + u_c - E= 0 avec u_R =Ri ; Ri + u_c - E = 0 or $i = \frac{dq}{dt}$ et comme $q = C.u_C$ donc $i = \frac{d(Cu_c)}{dt} = \frac{Cdu_c}{dt}$ donc $RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$, on pose τ=RC : $\boxed{\tau\frac{du_c}{dt}+u_c=E}$ ou $\boxed{\frac{du_c}{dt}+\frac{u_c}{\tau}=\frac{E}{\tau}}$ Remarque : Équation différentielle en i(t) (Pour avoir l'équation différentielle en i(t), il suffit de dériver l'équation précédente). $On\ a : Ri+u_C = E$ on dérive cette équation : $R\frac{di}{dt}+\frac{du_C}{dt}=0$ or $i=C\frac{du_c}{dt}$ d'où $\frac{du_c}{dt}=\frac{i}{C}$	

Titre	Description	Remarques
Étude théorique	$donc\ R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$; $on\ multiplie\ l'équation\ par\ C$ $on\ obtient$: $RC\frac{di}{dt}+i=0$ **2- Solution de l'équation différentielle :** L'équation différentielle précédente a pour solution $u_C = A - Be^{-\alpha t}$. Avec A ; B et α sont des constantes positives. Déterminons A ; B et α : **<u>1ère étape</u>** : Le condensateur est initialement vide $u_C(0) = 0$. $A - Be^{0} = 0 \Leftrightarrow A + B = 0$ donc B= A d'ou $u_C = A - Ae^{-\alpha t}$. **<u>2ème étape</u>** : lorsque $t \to +\infty$; le condensateur est complètement chargé : $u_C(\infty) = E$. $A - Ae^{-\infty} = E$ or $e^{-\infty} = 0$. $A - 0 = E$ d'où A=E et B= E. Donc $u_C = E - Ee^{-\alpha t}$. $u_C = E(1 - e^{-\alpha t})$. **<u>3ème étape</u>** : Cette solution vérifie l'équation différentielle $RC\frac{du_c}{dt}+u_c=E$, on remplace u_C par son expression $RC\frac{d(E-Ee^{-\alpha t})}{dt}+E-Ee^{-\alpha t}=E \Leftrightarrow$ $RCE(0-(-\alpha)e^{-\alpha t}) + E(1-e^{-\alpha t}) = E$ $RCE\alpha e^{-\alpha t} + E - E e^{-\alpha t} = E \Leftrightarrow RCE\alpha e^{-\alpha t} - E e^{-\alpha t} = 0 \Leftrightarrow Ee^{-\alpha t}(RC\alpha - 1) = 0$ or $Ee^{-\alpha t} > 0$ d'où $RC\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow RC\alpha = 1 \Leftrightarrow$ $\alpha=\frac{1}{RC}$ $on\ note\ \tau=RC\ d'où\ \alpha=\frac{1}{\tau}$. **$u_C = E(1- e^{-t/\tau})$.**	

Titre	Description	Remarques

Étude théorique

3- Expression et graphe de q(t) ; de u_R(t) et de i(t) :

a- Expression de q(t)

$$q(t) = Cu_C(t) = CE(1 - e^{-t/\tau}).$$

b- Expression de u_R(t) :

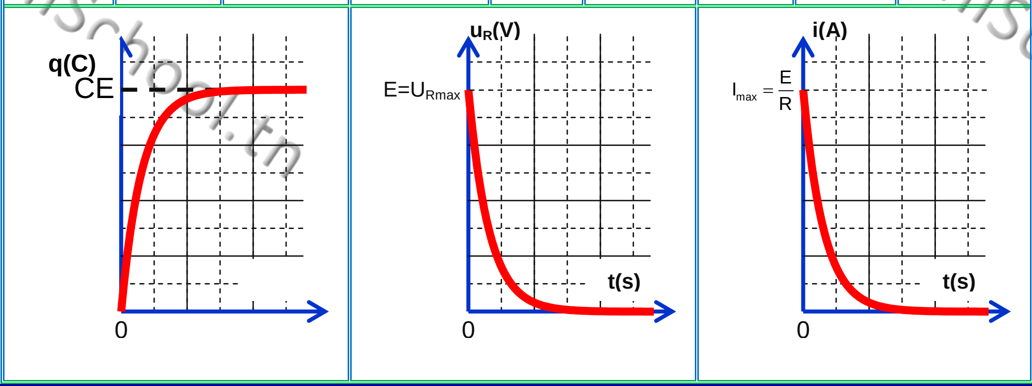
$u_R = E - u_c = E - E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E - E + E e^{-\frac{t}{\tau}}$ d'où $\boxed{u_R = E e^{-\frac{t}{\tau}}}$

c- Expression de i(t)

$$i = \frac{u_R}{R} \text{ donc } \boxed{i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

d- Graphe de q(t), de u_R(t) et de i(t) :

t(s)	0	$+\infty$	t(s)	0	$+\infty$	t(s)	0	$+\infty$
q(C)	0	CE	u_R(V)	E	0	i(A)	$\frac{E}{R}$	0



IV- La constante de temps d'un dipôle RC

a- **Définition** :

La constante de temps τ est une grandeur caractéristique du dipôle RC, elle nous renseigne sur la rapidité avec laquelle s'effectue la charge ou la décharge d'un condensateur.

b- Unité de τ :

$$\tau = RC \text{ avec } \begin{cases} R = \frac{u_R}{i} \text{ donc R est en } \frac{V}{A} \\ C = \frac{q}{u_C} \text{ or } q = It \text{ donc C est en } \frac{As}{V} \end{cases} \text{ d'où } \tau \text{ est en } \frac{V}{A}.\frac{As}{V} = s$$ (seconde) donc τ est un temps.

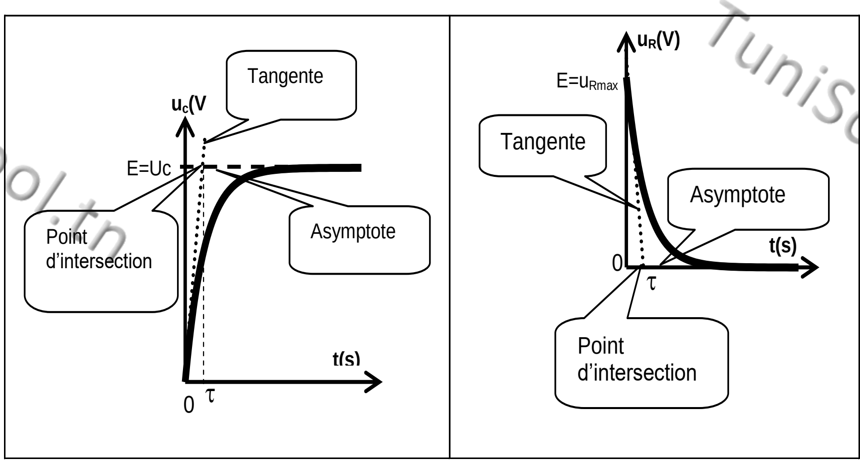
c- Détermination de τ :

- **Par calcul :**

Ayant les valeurs de R(en Ω) et de C(en F), on peut calculer directement τ(en s) ; τ=RC .

Titre	Description	Remarques

- **Graphiquement** :
  - **1ère méthode (utilisation de la tangente à l’origine)** : on peut montrer que τ est l’abscisse du point d’intersection de la tangente à la courbe de u_c (t)[de même pour u_R(t), i(t) et q(t)] à la date t=0 avec l’asymptote (lorsque $t \rightarrow +\infty$).



  - **2ème méthode (lecture graphique)** :

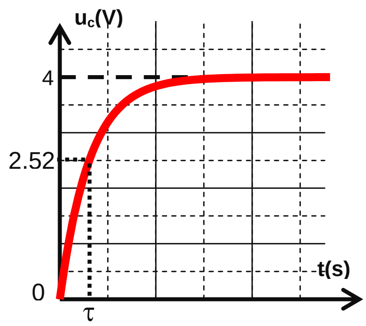
1er cas : à partir du graphe de u_c(t)

Pour t=τ, quelle est la valeur de u_c ?

$$u_c(\tau) = E(1 - e^{\frac{-\tau}{\tau}}) = E(1-e^{-1}) = 0,63E \text{ car } e^{-1} = 0,37$$

Exemple :

On a E= 4 V d’où 0,63.4 =2,52 V donc l’abscisse du point d’ordonnée 2,52 V est égale à τ



Titre	Description	Remarques

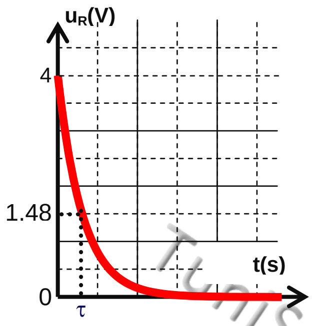
2ème cas : à partir du graphe de $u_R(t)$

Pour t=τ, quelle est la valeur de u_R ?

$$u_R(\tau) = E.e^{\frac{-\tau}{\tau}} = Ee^{-1} = 0{,}37E$$

Exemple :

On a E= 4 V d'où 0,37.4 =1,48 V donc l'abscisse du point d'ordonnée 1,48 V est égale à τ.



d- Durée de charge d'un condensateur

On peut considérer qu'un condensateur est complètement chargé lorsque sa tension

$$u_c = 0{,}99E \Leftrightarrow E(1-e^{\frac{-t}{\tau}}) = 0{,}99E\ ;$$

$$on\ divise\ l'équation\ par\ E : 1-e^{\frac{-t}{\tau}} = 0{,}99$$

$$1-0{,}99 = e^{\frac{-t}{\tau}} \Leftrightarrow e^{\frac{-t}{\tau}} = 0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln(0{,}01)$$

$$-\frac{t}{\tau} = -4{,}6 \Leftrightarrow t = 4{,}6\tau\ \ donc\ t \approx 5\tau = 5RC.$$

- Le temps de charge augmente avec R et avec C.

Pour t < 5τ, on a le régime transitoire.

Pour t ≥ 5τ, on a le régime permanent.

- La durée de charge d'un condensateur est indépendante de la fem E du générateur.

V- Influence de R et de C sur la durée de charge

1- Manipulation 1 :

On maintient le même condensateur et on réalise deux expériences avec deux résistances différentes R_1 et R_2.

$$C = constante \begin{cases} Expérience\ 1 \rightarrow R = R_1 \\ Expérience\ 2 \rightarrow R = R_2 > R_1 \end{cases}$$

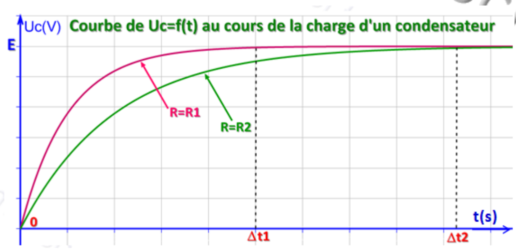
$R_2 > R_1$

$R_2C > R_1C$

$\tau_2 > \tau_1$

$5\tau_2 > 5\tau_1$

$\Delta t_2 > \Delta t_1$



Titre	Description	Remarques
Influence de R et de C sur la durée de charge d’un condensateur	**2- Manipulation 2 :** On maintient le même résistor et on réalise deux expériences avec deux condensateurs différentes C_1 et C_2. $R = constante \begin{cases} Expérience\ 1 \rightarrow C = C_1 \\ Expérience\ 2 \rightarrow C = C_2 > C_1 \end{cases}$ $R_2 > R_1$ $RC_2 > RC_1$ $\tau_2 > \tau_1$ $5\tau_2 > 5\tau_1$ $\Delta t_2 > \Delta t_1$