Chapitre n° 6 : OSCILLATIONS MECANIQUES

L'étude des systèmes oscillants constitue une application des lois de la mécanique.
L'application des lois de conservation conduit à l'introduction de la notion d'équation différentielle que nous ne chercherons pas à résoudre, mais dont nous admettrons la solution générale.

I) Notion de système oscillant :

1) Définitions :

a) Exemples d'oscillateurs :

La carrosserie d'une voiture et ses suspensions, une balançoire, la corde d'une guitare, le balancier d'une horloge, un objet suspendu à un ressort (pendule élastique), un objet pendu à un fil souple (pendule pesant) … constituent des systèmes oscillants.

b) Equilibre d'un système :

Un système est en équilibre et immobile dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) si toutes les parties de ce système sont immobiles dans le référentiel.

Exemple : Diapason au repos ; bille parfaitement sphérique posée sur une surface horizontale ; tige cylindrique posée verticalement sur un support horizontal …

Un système est en équilibre stable dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) si, légèrement écarté de cette position, il a spontanément tendance à y revenir.

Exemple : Balançoire ; ludion ; balancier d'une horloge …

Un système est en équilibre instable dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) si, légèrement écarté de cette position, il a spontanément tendance à s'en écarter davantage.

Exemple : Tige cylindrique posée verticalement sur un support horizontal …

Un système est en équilibre indifférent dans un référentiel galiléen ($\mathcal{R}$) si, écarté de cette position, il reste dans la nouvelle position.

Exemple : Bille parfaitement sphérique posée sur une surface horizontale …

c) Oscillateur et période :

Un oscillateur mécanique est un système mécanique qui effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre stable.
Une oscillation est un aller-retour autour de la position d'équilibre stable.
Les oscillations sont périodiques si elles se reproduisent identiques à elles-mêmes, à intervalles de temps successifs égaux.
La période T d'un phénomène périodique est la plus courte durée au bout de laquelle il se reproduit identique à lui-même (T en s). La fréquence f d'un phénomène périodique est le nombre de fois que ce phénomène se reproduit par seconde : $f = 1/T$ (f en Hz).

2) Différents types d'oscillations :

- Oscillations libres :
Un oscillateur est en oscillations libres si, après avoir été mis en oscillation il ne subit aucune intervention du milieu extérieur.
* Oscillations libres non amorties : si l'oscillateur est périodique de période propre T_0. Sur une faible durée on considérera un oscillateur peu amorti comme périodique.
* Oscillations libres amorties : si l'oscillateur est amorti, on aura des oscillations pseudopériodiques. A cause des amortissements, l'amplitude de l'oscillateur diminue.

- Oscillations libres entretenues :

Un oscillateur est en oscillations libres entretenues s'il est muni d'un dispositif qui compense, à chaque oscillation, les perdes subies par frottements.

L'entretien des oscillations est assuré par un système accumulateur d'énergie mécanique (poids, ressort spiral) et d'un système d'échappement.

- Oscillations forcées :

Une source extérieure impose sa période à l'oscillateur qui suit donc avec plus ou moins de facilité ces oscillations. Les oscillations sont alors forcées à une période T imposée.

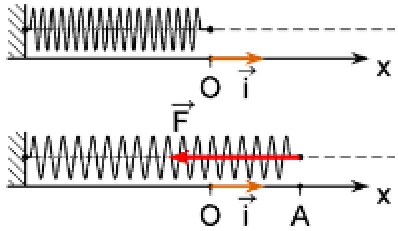
Lors de l'évolution de l'oscillateur forcé on distingue deux phases : au début, on a la mise en oscillation de l'oscillateur dans la phase transitoire, puis s'établit un régime permanent.

II) Dispositif solide-ressort ou oscillateur élastique :

1) Force de rappel exercée par un ressort :

La force exercée par un ressort sur un solide est appelée "force de rappel".

L'intensité F de la force de rappel d'un ressort est proportionnelle à l'allongement défini par $\Delta\ell = \ell - \ell_0$: $F = k.|\Delta\ell|$



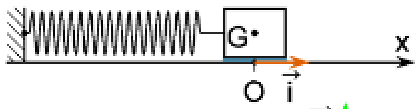
En prenant un axe Ox orienté par le vecteur unitaire $\vec{i}$, et ayant pour origine le point O où se trouve l'extrémité du ressort lorsqu'il est au repos, son extrémité, lorsque le ressort est allongé, est située au point A d'abscisse x, on peut écrire vectoriellement :

$$\boxed{\vec{F} = -k.x.\vec{i} \quad \text{ou} \quad F_x = -k.x}$$

Remarque : Si le ressort est à "spires non jointives", lorsqu'il est comprimé ($\ell < \ell_0$) on a $x < 0$ et donc $F_x > 0$, la "force de rappel" est répulsive.

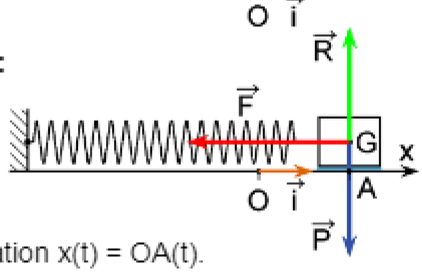
2) Dispositif expérimental :

Un mobile (autoporteur) de masse m peut osciller sur un rail à air horizontal. Il est maintenu par un ressort de constante de raideur k. La position de la projection A du centre d'inertie G est repérée par rapport à la position O qu'il occupe quand le ressort est au repos.



3) Etude "mécaniste" de l'oscillateur élastique non amorti :

a) Equation différentielle :



On pose OA = x. Dans les conditions initiales :

Le mobile est écarté de sa position d'équilibre ($OA_0 = X_0$)

Lâché sans vitesse initiale à la date t = 0 (v(0) = 0)

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de l'élongation x(t) = OA(t).

En première approximation on néglige les frottements.

On modélise le système par un mobile de masse m relié à un point fixe par un ressort de raideur k. Le mobile est assujetti à se déplacer sans frottement sur un axe Ox.

On considère le système {masse m} dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. Bilan :

- le mobile est soumis à son poids $\vec{P}$,
- à la réaction normale de la table $\vec{R}$ (frottements négligeables),
- à la force de rappel $\vec{F}$ du ressort.

On applique le théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$

En projection sur l'axe Ox, on a : $F_x = m.a_x$, or, on sait que $F_x = -k.x$

D'où $-k.x(t) = m.\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ et $m.\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k.x(t) = 0$

Soit $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0}$

L'élongation x(t) est solution de cette équation différentielle homogène du second ordre.

b) Oscillateur harmonique :

On cherche une solution de la forme : $\boxed{x(t) = X_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)}$

T_0 est la période propre (en s) des oscillations non amorties de l'élongation x(t).
T_0 n'est pas une inconnue, c'est une constante que l'on va déterminer par identification.
X_m et φ sont des constantes d'intégration inconnues, il nous faut des informations supplémentaires pour les déterminer : les conditions initiales.
X_m (en m) est l'amplitude des oscillations propres de x(t).
$(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ est la phase des oscillations.
φ est la phase à l'origine des dates (pour t = 0).
x(t) oscille de façon sinusoïdale, le système constitue un oscillateur harmonique.

- Identification de T_0 : si $x(t) = X_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$, alors $\frac{dx(t)}{dt} = -X_m.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ et

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -X_m.(\frac{2.\pi}{T_0})^2.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ la substitution dans l'équation différentielle s'écrit :

$X_m.(\frac{2.\pi}{T_0})^2.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) - X_m.\frac{k}{m}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) = 0$ qui doit être vrai pour tout t !

Soit $[X_m.(\frac{2.\pi}{T_0})^2 - X_m.\frac{k}{m}].\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) = 0$ qui doit être vrai pour tout t.

On a donc $X_m.(\frac{2.\pi}{T_0})^2 = X_m.\frac{k}{m}$ $\qquad T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$

X_m et φ restent indéterminés.

- X_m et φ ne sont pas caractéristiques de l'oscillateur et dépendent des conditions initiales.

Si $x(t) = X_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ alors $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -X_m.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$

Etant donné le choix des conditions initiales :

$$x(0) = X_m.\cos(\varphi) = X_0 \text{ et } v_x(0) = -X_m.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\varphi) = 0 \text{ d'où } \phi = 0 \text{ et } X_m = X_0$$

D'où le mouvement $x(t) = X_0.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)$

- Analyse dimensionnelle de la période propre : k donnée par $F_x = -k.x$, k est homogène à $\frac{[Force]}{[Longueur]}$, F_x est homogène à $\frac{[Masse]x[Longueur]}{[Temps]^2}$, donc k est homogène à $\frac{[Masse]}{[Temps]^2}$.
La masse m est homogène à [Masse]

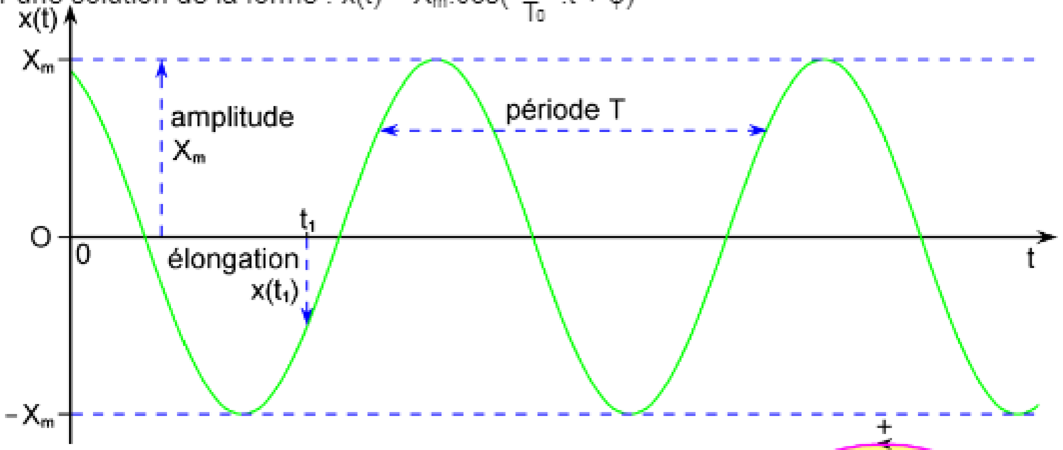
Le rapport m/k est homogène à $[Masse]x\frac{[Temps]^2}{[Masse]} = [Temps]^2$

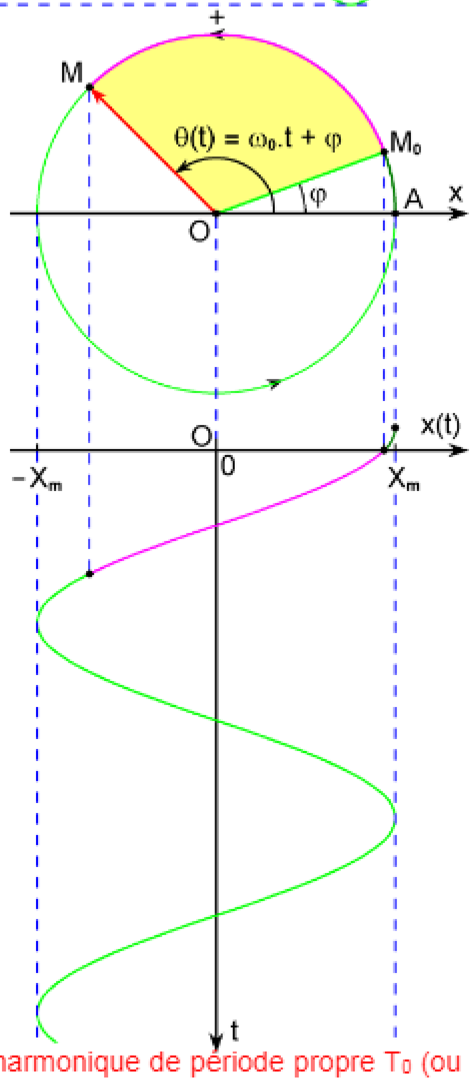
$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$ est donc homogène à un [Temps].

Remarque : On aurait pu choisir la fonction $x(t) = X_m.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi')$ en posant $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ et montrer que c'est aussi une solution de l'équation différentielle …

4) Oscillateur harmonique et mouvement circulaire uniforme :

On peut donc représenter les oscillations de l'oscillateur harmonique en fonction du temps par une solution de la forme : $x(t) = X_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$





Considérons un point mobile M qui décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = X_m$ d'un mouvement uniforme : M a un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse de mesure constante v_C.

- On choisit un point A particulier comme origine des abscisses curvilignes sur le cercle.
- On oriente le cercle trajectoire dans un sens arbitraire.

La position du mobile est repérée par son abscisse curviligne : $s(t) = \text{arc algébrique } AM$

A l'instant de date $t = 0$, le point mobile est en M_0 et sont abscisse est $s(0) = s_0$.

Son abscisse est de la forme : $s(t) = v_C.t + s_0$

On peut aussi repérer la position du mobile par l'angle $\theta(t)$ orienté, son abscisse angulaire est :

$$\theta(t) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$$

A la date $t = 0$ son abscisse angulaire est : $\theta(0) = \varphi$

On a la relation géométrique : $s(t) = R.\theta(t)$

La mesure algébrique de la vitesse du mobile est :

$$\overline{v_C} = \frac{ds(t)}{dt} = R.\frac{d\theta(t)}{dt} = c^{te}$$

La vitesse angulaire du point mobile est constante :

$$\omega_0 = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{2.\pi}{T_0}$$

où T_0 est la période de rotation du point mobile

On a donc : $\theta(t) = \frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi = \omega_0.t + \varphi$

La projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Ox donne :

$$x(t) = X_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) = X_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$$

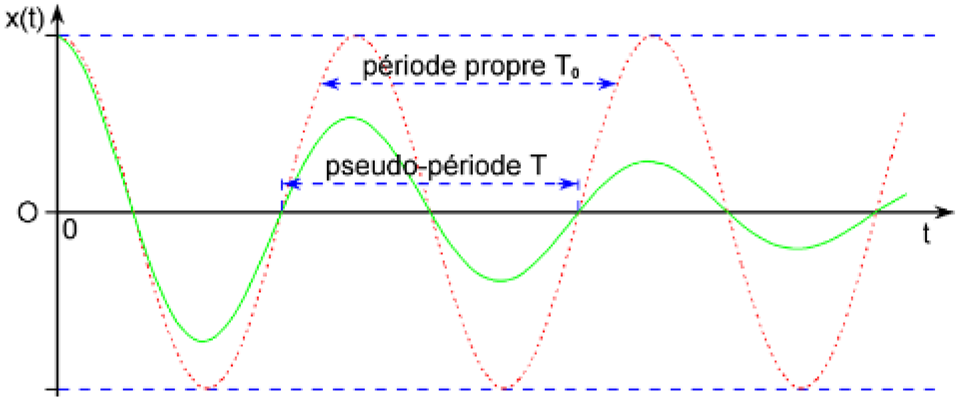
On peut considérer que le mouvement d'un oscillateur harmonique de période propre T_0 (ou de fréquence propre N_0), d'amplitude X_m, constitue la projection, sur un axe, d'un mouvement circulaire uniforme de même période (de même fréquence) sur un cercle trajectoire de rayon $R = X_m$.

On appelle pulsation propre $\omega_0 = 2.\pi/T_0$ de l'oscillateur harmonique, la vitesse angulaire du mobile fictif associé à l'oscillateur et qui décrit un mouvement circulaire uniforme

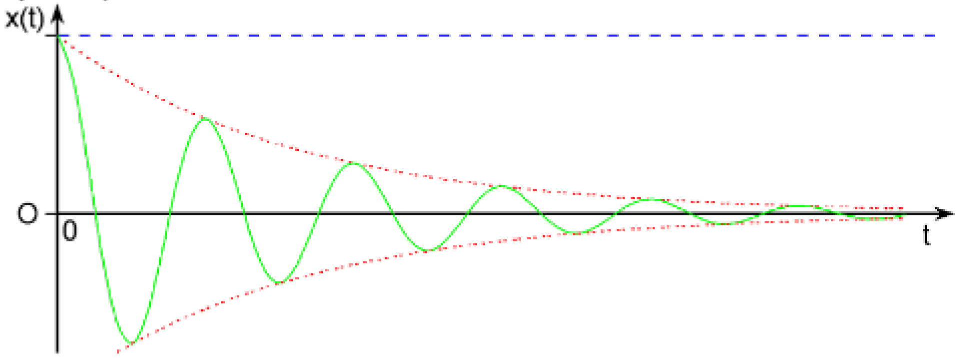
5) Amortissement de l'oscillateur élastique :

L'expérience montre que l'oscillateur élastique s'amortit et finit par s'arrêter. On parle alors de mouvement pseudopériodique de pseudo période T. L'expérience montre que la pseudo période T est toujours plus grande que la période propre T_0.

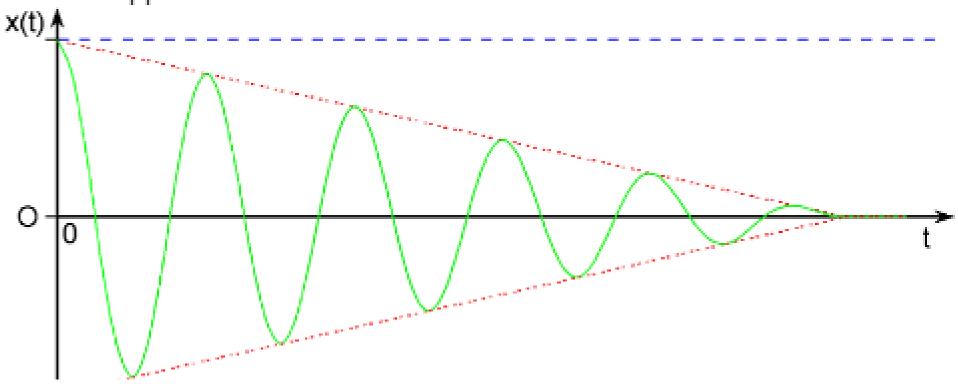
Néanmoins, lorsque l'amortissement est assez faible, on a pratiquement $T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$



On a des frottements fluides lorsque l'amortissement est dû à des forces aéro ou hydrodynamiques.



On a des frottements solides lorsque l'amortissement est dû à des forces de contact entre un solide et son support.



III) Aspect énergétique :

- Le mobile est écarté de sa position d'équilibre ($OG_0 = X_0$) et lâché sans vitesse initiale à la date t = 0 (v(0) = 0).
  On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de l'élongation x(t) = OG(t).
- Allure : x(t) est périodique et semble sinusoïdal. En première approximation on pourra négliger les frottements.
- Energie : ayant x(t), l'ordinateur peut calculer $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

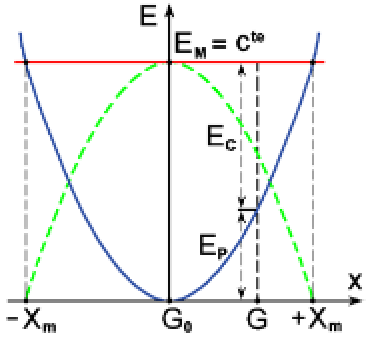
  On peut alors étudier l'évolution de l'énergie cinétique :

  $E_C = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.[\dot{x}(t)]^2$

  et de l'énergie potentielle : $E_P = \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2$

  Considérons l'énergie mécanique :

  $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}.m.[\dot{x}(t)]^2 + \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2$



- Représentation graphique : on peut représenter les trois formes d'énergie sur un même diagramme, le mobile oscille entre deux valeurs extrêmes.
- L'expérience montre que l'énergie mécanique est constante (en première approximation), on dit que le système est conservatif.

On a : $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}.m.[v(t)]^2 + \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2 = c^{te}$, dérivons par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}.m.\frac{d[v(t)]^2}{dt} + \frac{1}{2}.k.\frac{d[x(t)]^2}{dt} = \frac{1}{2}.m.2.v.\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{2}.k.2.x.\frac{dx(t)}{dt} = 0$$

Soit $m.v.\frac{dv(t)}{dt} + k.x.\frac{dx(t)}{dt} = 0$ et avec $v = \frac{dx}{dt}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

on obtient $m.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x.\frac{dx}{dt} = 0$ ou $\frac{dx}{dt}.[m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x] = 0$

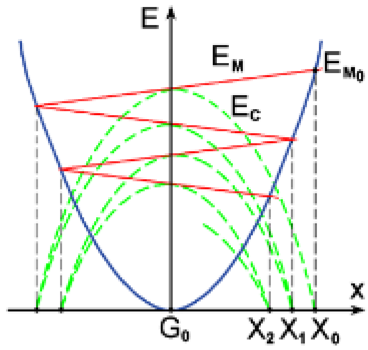
d'où l'on tire : $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0}$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique (sinusoïdal).

On peut vérifier que $X_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle.

Nous avons vu qu'en réalité, lorsqu'on laisse osciller un pendule ou un ressort les oscillations finissent par cesser.
L'oscillateur réel est toujours amorti, il apparaît en effet des frottements mécaniques ou d'autres phénomènes irréversibles qui dissipent de l'énergie sous forme de chaleur.

En représentant sur un diagramme des énergies les différentes formes d'énergies en fonction de l'élongation il est possible de comprendre qualitativement l'évolution des oscillations en fonction du temps. L'énergie mécanique n'est plus conservée.

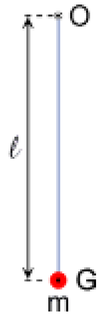


IV) Pendule simple :

1) Pendule pesant et pendule simple :

Un solide quelconque mobile autour d'un axe Δ ne passant pas par son centre d'inertie G constitue un pendule pesant.
On peut étudier expérimentalement les oscillations du pendule pesant.
Pour faire une étude théorique nous nous restreindrons au cas particulier du pendule simple.

Le pendule simple est constitué d'une masse m ponctuelle située au point G et accrochée à un point fixe O par un fil souple, léger, inextensible, de longueur ℓ.



On considère un pendule pesant constitué d'un objet sphérique de rayon r, de masse m, de centre d'inertie G et accroché à un point fixe O par un fil souple, inextensible, et tel que OG = ℓ : si r << ℓ nous dirons que le pendule modélise un pendule simple de longueur ℓ.

Au court du mouvement d'oscillation, l'oscillateur n'est jamais en équilibre (même quand il repasse par la position d'équilibre stable) : on parle d'écart à l'équilibre.

Si l'amplitude angulaire θ_0 des oscillations d'un pendule est suffisamment faible (θ_0 < 10 °) l'expérience montre que la période des oscillations non amorties ne dépend pas de θ_0.

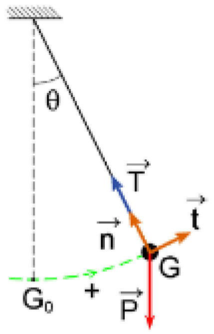
On dit qu'il y a isochronisme des "petites oscillations" (θ_0 < 10 ° "condition d'isochronisme").
L'expérience montre que la période propre T_0 du pendule simple ne dépend pas de la masse :

$$\boxed{T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

2) Etude mécaniste du pendule simple :

a) Equation différentielle :

Considérons le système {masse m} dans le référentiel du laboratoire.
La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, et à la tension $\vec{T}$ du fil.
La deuxième loi de Newton s'écrit : $\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$
On oriente la trajectoire circulaire du point G dans un sens.
La position de G à l'équilibre, G_0, est prise pour origine des abscisses curvilignes.



On a alors : l'arc $GG_0 = s(t) = \ell.\theta(t)$ ainsi que $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \ell.\frac{d\theta(t)}{dt}$

On projette la 2ème loi de Newton dans le repère de Frénet (G, $\vec{t}$, $\vec{n}$) :

Sur l'axe tangent : $-P.\sin[\theta(\tau)] = m.a_t$, or, on sait que $a_t = \frac{dv(t)}{dt}$

D'où $$-P.\sin[\theta(t)] = m.\ell.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Cette équation différentielle n'a pas de solution analytique simple dans le cas général.

b) Cas des petites oscillations :

On considère de petites oscillations, $\theta(t)$ reste petit devant 1 en rad (θ < 20 °).
On sait alors que : $\sin\theta \approx \theta$. On peut réécrire l'équation différentielle sous la forme :

$$-m.g.\theta(t) = m.\ell.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Qu'on peut mettre sous la forme $$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}.\theta(t) = 0$$

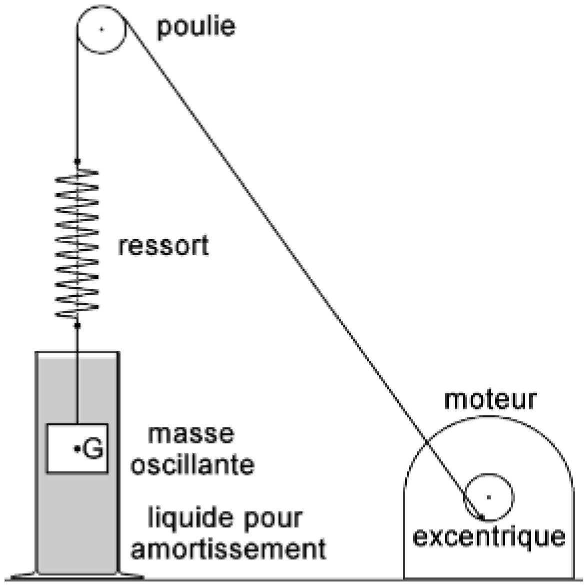
On retrouve une équation différentielle du second ordre dont la solution est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) \quad \text{avec} \quad T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

V) Oscillations mécaniques forcées :

1) Dispositif expérimental :

On observe le mouvement d'une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixée à une poulie excentrique par l'intermédiaire d'un fil passant sur une poulie. L'excentrique est entraînée par un moteur électrique dont on peut faire varier la vitesse de rotation.
La masse m peut être immergé dans un liquide pour l'étude d'amortissements.



2) Définition :

Un oscillateur est en oscillations forcées lorsque ses oscillations et sa fréquence d'oscillations sont imposées par un dispositif extérieur.

3) Résonance :

a) Mise en évidence :

- On détermine la fréquence propre N_0 de l'oscillateur élastique constitué du ressort est de la masse m : on mesure donc la fréquence des oscillations libres de l'oscillateur.
- Puis on étudie la "réponse" de cet oscillateur à une excitation périodique de fréquence N imposée par la rotation du moteur : à chaque valeur de N correspond une amplitude $X_m(N)$ des oscillations forcées de l'oscillateur élastique.

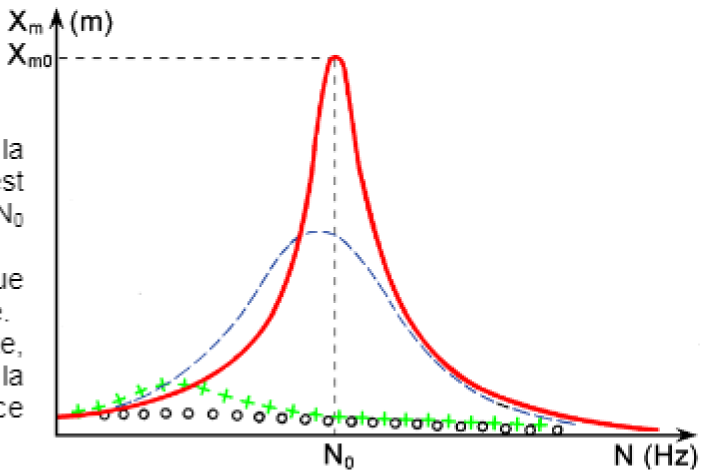
La courbe $X_m = f(N)$ est appelée "courbe de résonance" de l'oscillateur.

b) Courbe de résonance :

L'amplitude du mouvement d'oscillations forcées passe par une valeur maximale X_{m0} pour une fréquence N_r voisine de la fréquence N_0 de l'oscillateur et appelée fréquence de résonance. Ce phénomène est appelé résonance.

Remarque : Il ne faut pas confondre l'amplitude X_m du mouvement qui est la valeur maximale de l'élongation x, avec l'amplitude maximale X_{m0} qui est la valeur de l'amplitude à la résonance.

L'oscillateur étudié est appelé résonateur et le système produisant les oscillations forcées est appelé excitateur.
Pour un amortissement faible, la fréquence de résonance N_r est voisine de la fréquence propre N_0 de l'oscillateur.
La fréquence de résonance diminue lorsque l'amortissement augmente.
Lorsque l'amortissement augmente, l'amplitude des oscillations à la résonance diminue et la résonance devient "floue".



Christian BOUVIER

A RETENIR

I) Notion de système oscillant :

1) Définitions :

Un système est en équilibre et immobile dans un référentiel galiléen ($\mathfrak{R}$) si toutes les parties de ce système sont immobiles dans le référentiel.

Un système est en équilibre stable dans un référentiel galiléen ($\mathfrak{R}$) si, légèrement écarté de cette position, il a spontanément tendance à y revenir.

Un système est en équilibre instable dans un référentiel galiléen ($\mathfrak{R}$) si, légèrement écarté de cette position, il a spontanément tendance à s'en écarter davantage.

Un système est en équilibre indifférent dans un référentiel galiléen ($\mathfrak{R}$) si, écarté de cette position, il reste dans la nouvelle position.

Un oscillateur mécanique est un système mécanique qui effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre stable.

Une oscillation est un aller-retour autour de la position d'équilibre stable.

Les oscillations sont périodiques si elles se reproduisent identiques à elles-mêmes, à intervalles de temps successifs égaux.

La période T d'un phénomène périodique est la plus courte durée au bout de laquelle il se reproduit identique à lui-même (T en s). La fréquence f d'un phénomène périodique est le nombre de fois que ce phénomène se reproduit par seconde : f = 1/T (f en Hz).

2) Différents types d'oscillations :

- Oscillations libres :
- Oscillations libres entretenues :
- Oscillations forcées :

II) Dispositif solide-ressort ou oscillateur élastique :

Etude "mécaniste" de l'oscillateur élastique non amorti :

a) Equation différentielle :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0$$

b) Oscillateur harmonique :

$$x(t) = X_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$$

T_0 est la période propre (en s) des oscillations non amorties de l'élongation x(t).
X_m (en m) est l'amplitude des oscillations propres de x(t).

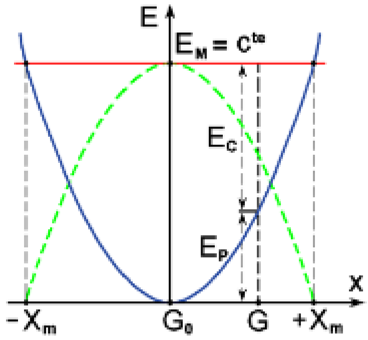
$(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ est la phase des oscillations.

φ est la phase à l'origine des dates (pour t = 0).
x(t) oscille de façon sinusoïdale, le système constitue un oscillateur harmonique.

$$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On peut considérer que le mouvement d'un oscillateur harmonique de période propre T_0 (ou de fréquence propre N_0), d'amplitude X_m, constitue la projection, sur un axe, d'un mouvement circulaire uniforme de même période (de même fréquence) sur un cercle trajectoire de rayon $R = X_m$.

III) Aspect énergétique :



$E_C = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.[\dot{x}(t)]^2$ et $E_P = \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2$

$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}.m.[\dot{x}(t)]^2 + \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2$

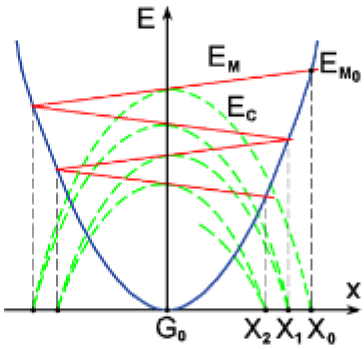
- Représentation graphique : on peut représenter les trois formes d'énergie sur un même diagramme, le mobile oscille entre deux valeurs extrêmes.

On a : $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}.m.[v(t)]^2 + \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2 = c^{te}$

on obtient $m.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x.\frac{dx}{dt} = 0$ ou $\frac{dx}{dt}.[m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x] = 0$

d'où l'on tire : $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0}$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique (sinusoïdal).



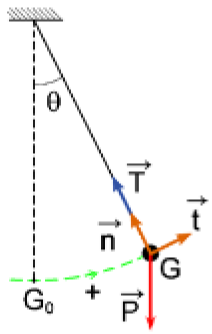
L'oscillateur réel est toujours amorti, il apparaît en effet des frottements mécaniques ou d'autres phénomènes irréversibles qui dissipent de l'énergie sous forme de chaleur.

En représentant sur un diagramme des énergies les différentes formes d'énergies en fonction de l'élongation il est possible de comprendre qualitativement l'évolution des oscillations en fonction du temps. L'énergie mécanique n'est plus conservée.

IV) Pendule simple :

2) Etude mécaniste du pendule simple :

a) Equation différentielle :



$$-P.\sin[\theta(t)] = m.\ell.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Cette équation différentielle n'a pas de solution analytique simple dans le cas général.

b) Cas des petites oscillations :

On considère de petites oscillations
$\sin\theta \approx \theta$. On peut réécrire l'équation différentielle sous la forme :

$$-m.g.\theta(t) = m.\ell.\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

D'où $$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}.\theta(t) = 0$$

On retrouve une équation différentielle du second ordre dont la solution est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) \text{ avec } T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

V) Oscillations mécaniques forcées :

Définition :

Un oscillateur est en oscillations forcées lorsque ses oscillations et sa fréquence d'oscillations sont imposées par un dispositif extérieur.