

# Probabilités conditionnelles

## Probabilité de A sachant B.

Soient A et B deux événements, l'événement B étant de probabilité non nulle. La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est notée  $p_B(A)$  (ou aussi  $p(A|B)$ ). Elle est donnée par la formule

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

On en déduit que

$$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A).$$

## Evénements indépendants

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On peut donner trois définitions équivalentes de l'indépendance des événements A et B :

- A et B sont indépendants si et seulement si  $p_B(A) = p(A)$ .
- A et B sont indépendants si et seulement si  $p_A(B) = p(B)$ .
- A et B sont indépendants si et seulement si  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ .

## Variables aléatoires discrètes indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant respectivement les valeurs  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_m$ .

- X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si pour tout entier i tel que  $1 \leq i \leq n$  et pour tout entier j tel que  $1 \leq j \leq m$   
 $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$ .

## Formule des probabilités totales

$A_1, A_2, \dots, A_n$  sont n événements (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) tels que :

- chaque événement  $A_i$  a une probabilité non nulle,
- deux événements quelconques  $A_i$  et  $A_j$ ,  $i \neq j$ , sont incompatibles (c'est-à-dire que pour tous entiers distincts i et j tels que  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$  on a  $p(A_i \cap A_j) = 0$ ),
- la réunion des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est l'ensemble des cas possibles  $\Omega$ .

Alors, pour tout événement B

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B). \end{aligned}$$