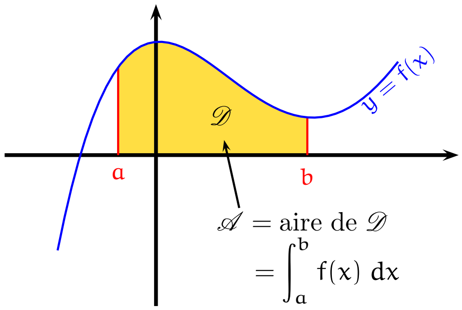
Intégrales

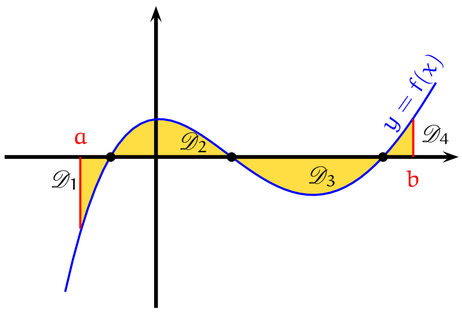
Définition de l'intégrale

Un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant fixé, l'unité d'aire est l'aire du carré OIKJ où $I(1,0)$, $K(1,1)$ et $J(0,1)$ (l'aire du carré OIKJ vaut 1 par définition).



f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.
$\mathscr{D}$ est le domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,dx$ car il est obtenu en $\int$ommant les aires des rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx quand x varie de a à b.



Si f n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est la différence de la somme des aires des domaines situés au-dessus de (Ox) et de la somme des aires des domaines situés au-dessous de (Ox).

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4.$$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriétés de l'intégrale

• Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et λ un réel. Alors $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

• Positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

• Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Si m et M sont deux réels tels que pour tous réels x de $[a, b]$, on ait $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

• Relation de Chasles

Convention : On pose $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.