Généralités sur les fonctions

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

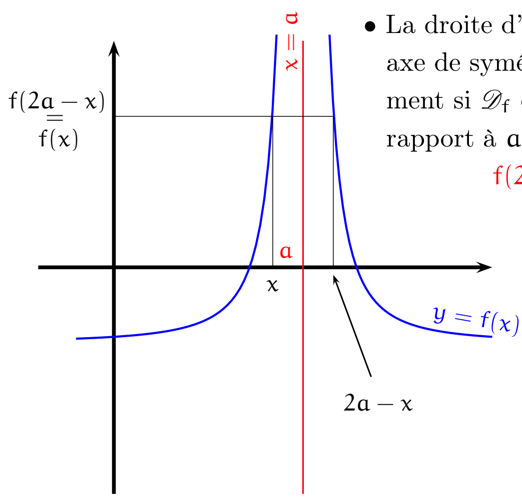
- f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
  f est décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
  f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
- f est monotone sur I si et seulement si f est croissante sur I ou f est décroissante sur I.
  f est strictement monotone sur I si et seulement si f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I.

Extrema des fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

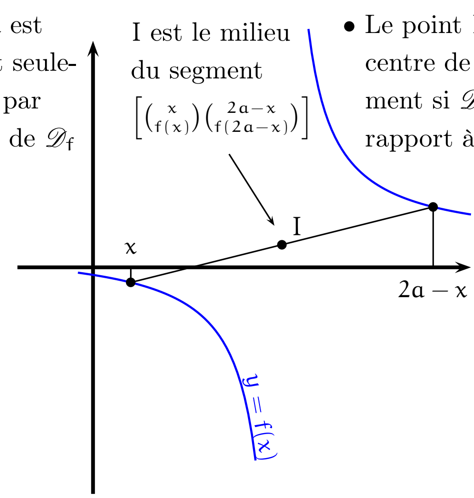
- On dit que f admet un maximum global en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
  On dit que f admet un minimum global en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
- On dit que f admet un maximum local en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un maximum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que, pour tout réel x de $I \cap J$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
  On dit que f admet un minimum global en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que, pour tout réel x de $I \cap J$, on a $f(x) \geq f(x_0)$.

Symétries, fonction paires et impaires



- La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à a et pour tout x de $\mathscr{D}_f$
  $$f(2a - x) = f(x).$$

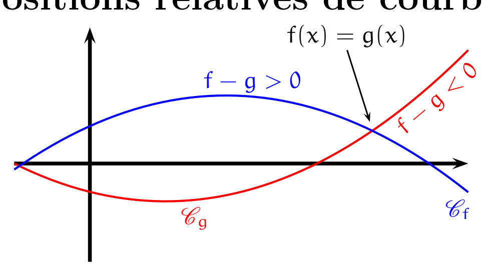
- Il revient au même de dire que pour tout réel h tel que $a + h$ est dans $\mathscr{D}_f$, on a
  $$f(a - h) = f(a + h)$$
- Quand $a = 0$ et que $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, on a pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. f est alors dite paire et l'axe (Oy) est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.



- Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à a et pour tout x de $\mathscr{D}_f$
  $$\frac{f(2a - x) + f(x)}{2} = b.$$

- Il revient au même de dire que pour tout réel h tel que $a + h$ est dans $\mathscr{D}_f$, on a
  $$\frac{f(a - h) + f(a + h)}{2} = b$$
- Quand $a = 0$ et que $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, on a pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$. f est alors dite impaire et le point O est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Positions relatives de courbes. Intersection de courbes



- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Le signe de $f - g$ fournit les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:
  - si $f - g \geq 0$ sur I $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I,
  - si $f - g \leq 0$ sur I $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I.