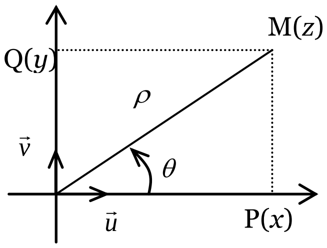
Identités remarquables (valables sur $\mathbb{C}$)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Binôme de Newton : $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$

Forme : algébrique $z = x + iy$ $\qquad$ trigonométrique $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{OP} = x = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OP} = y = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$$

$$z \cdot z' = (x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \;;\quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta} \;;\quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \;;\quad \overline{zz'} = \bar{z}\cdot\bar{z}'$$

Inverse : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$ $\quad x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$; $\quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$z \cdot z' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\cdot\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad$ $|zz'| = |z|\cdot|z'|$; $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$ $\qquad$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Distance de deux points : $AB = |b - a|$

Inégalité triangulaire :
$\big||z| - |z'|\big| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$

Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ou $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Racines n^{ièmes} de l'unité : $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $\left|u_k\right| = 1$

Les solutions de $z^n = a$, où $a = \rho e^{i\alpha}$, sont $z_k = z_0 u_k$, où $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\alpha}{n}}$