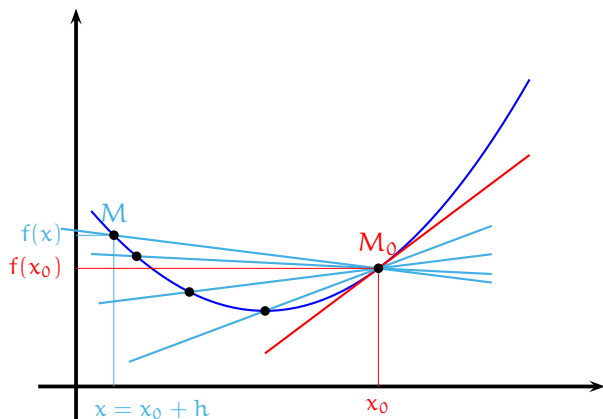
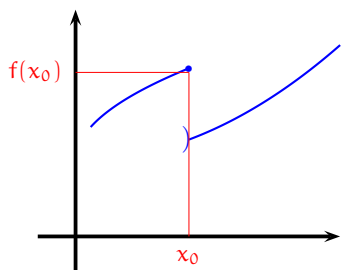


## Nombre dérivé. Tangente

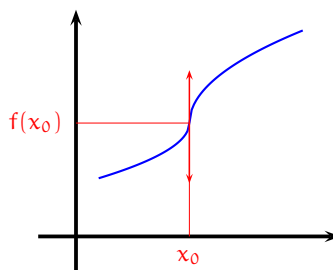


- $M_0(x_0, f(x_0))$  et  $M(x, f(x))$ . Pour  $x \neq x_0$ , le coefficient directeur de la droite  $(M_0M)$  est  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .
- $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si le taux  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ .  
Il revient au même de dire que le taux  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  a une limite finie quand  $h$  tend vers 0.
- Dans ce cas, le **nombre dérivé** de  $f$  en  $x_0$  est 
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
.
- $f'(x_0)$  est le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $M_0(x_0, f(x_0))$ .
- Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $M_0(x_0, f(x_0))$  est 
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

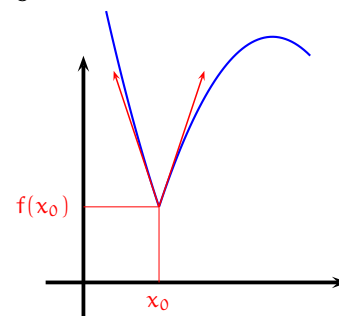
## Trois situations où la fonction $f$ n'est pas dérivable en $x_0$



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ .  
 $f$  n'est pas continue en  $x_0$ .



$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ .  
 $\mathcal{C}_f$  admet une tangente parallèle à  $(Oy)$ .



$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .  
 $\mathcal{C}_f$  admet deux demi-tangentes de directions différentes.

## Fonctions dérivables sur un intervalle. Fonction dérivée

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .  $f$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si  $f$  est dérivable en chaque réel  $x$  de  $I$ . La fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ , est alors la fonction qui à chaque réel  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$  de la fonction  $f$  en  $x$ .

### Lien avec la continuité

- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est continue en  $a$ ,  $f$  n'est pas obligatoirement dérivable en  $a$ .

La fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas dérivable en 0. La fonction racine carrée est continue sur  $[0, +\infty[$  mais n'est pas dérivable en 0. On a ainsi deux exemples de fonctions continues et non dérivables en un point.

On ne peut pas dire «  $f$  est dérivable et continue sur  $I$  » et encore moins «  $f$  est continue et donc dérivable sur  $I$  ».

## Dérivées et sens de variation

Soit  $f$  une fonction **dérivable** sur un **intervalle**  $I$ .

- Si  $f' \geq 0$  (respectivement  $f' \leq 0$ ),  $f$  est croissante sur  $I$  (respectivement décroissante sur  $I$ ).
- Si  $f' > 0$  (respectivement  $f' < 0$ ) sauf peut-être en un nombre fini de points où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$  (respectivement strictement décroissante sur  $I$ ).

## Dérivées et extrema des fonctions

Soient  $f$  une fonction **dérivable** sur un **intervalle ouvert**  $I$  et  $x_0$  un réel de  $I$ .

- Si  $f(x_0)$  est un extremum local de  $f$  alors  $f'(x_0) = 0$ .
- Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe,  $f(x_0)$  est un extremum local de  $f$ .