Lycée Thélèpte

Avril 2012

Durée : 2heures

DEVOIR DE CONTROLE N°3

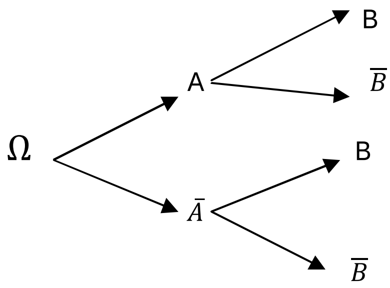
Niveau :4 éme Sciences experimentales
Epreuve : Mathématiques
Prof : Mhamdi Abderrazek

Exercice n°1 :(4points)

On donne l'arbre de probabilité ci-contre

On connait que p(A)=0.2 ; p_A(B) =0.5

et $p_{\bar{A}}$ (B) = 0.6 .



1). Compléter cet arbre

2). Calculer p (A∪B) ;p(B) et p_B(A)

3).A et B sont-ils indépendants ?

Exercice n°2 :(6points)

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 %des élèves sont des filles .De plus 20%des filles et 30%des garçons fument.

1).On choisie un élève au hasard. On note A l'événement<l'élève choisi fume >
et F l'événement<l'élève choisi est une fille> et p(A) la probabilité de A

Quelle est la probabilité que :

a).Cet élève soit un garçon?

b). Cet élève soit une fille qui fume ?

c). Cet élève soit un garçon qui fume ?

2).Montrer que p(A)=0,24

3). L'enquête permet de savoir que :

.Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;

. Parmi les élèves non fumeurs, la moitié ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement<l'élève choisi a des parents fumeurs >

a). Calculer les probabilités des événements suivant :

C :< l'élève choisi est fumeur et ses parents sont des fumeurs>

D :< l'élève choisi n'est pas un fumeur et ses parents sont des fumeurs>

b). Calculer p(B).

4).a). Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

b). Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

<u>Exercice n°3</u> :(4points)

Soit n un entier naturel On considère la fonction f_n définie sur [0 ;1] par :
$f_0(x)=\ln(x)$ et $f_n(x)=x^n\ln(x)$ si n>0 et on pose $I_n=\int_1^e f_n(x)dx$ $\forall$ n$\in$ IN

1). Calculer I_0; I_1 et I_2

2). Etudier la monotonie de (I_n)

3).a). Exprimer I_n en fonction de n.

b). En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

c). la suite (I_n) est elle majorée ? Justifier.

<u>Exercice n°4</u> :(6points)

1). On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=xe^{-x}$

a). Dresser le tableau de variation de g sur IR

b). Tracer $\boldsymbol{C_g}$,la courbe de g, dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

c). Calculer **A** l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :x=0 ;x=1 ;y=0 et la courbe$\boldsymbol{C_g}$**.**

2). on considère la fonction f définie par :$f(x)=\frac{e^x}{e^x-x}$

a).Démontrer que $e^x \neq x$ $\forall$ x$\in$ IR

b). Montrer que f est définie et dérivable sur IR

c). Dresser le tableau de variation de f sur IR

d). Tracer $\boldsymbol{C_f}$,la courbe de f, dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

BON TRAVAIL

Lycée Thélèpte

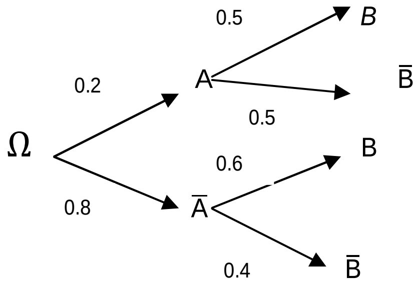
Avril 2012

Corretion du devoir de controle n°3

Niveau :4 éme Sciences experimentales
Epreuve : Mathématiques
Prof : Mhamdi Abderrazek

Exercice n°1 :

1).*Voir l'arbre ci-contre*



2).i).*p(A∪B)=1-p($\bar{A}\cap\bar{B}$)=1-0.4x0.8=0.68.*

ii).p(B)= p_A(B).p(A)+ $p_{\bar{A}}$ (B).p($\bar{A}$)=0.1+0.48=0.58

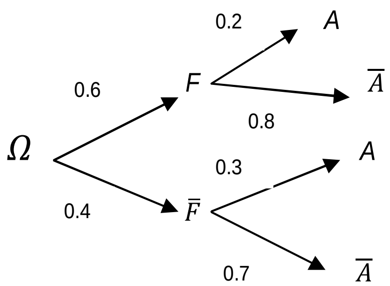
iii). $p_B(A)=\frac{p(B\cap A)}{p(B)}=\frac{0.1}{0.58}=\frac{10}{58}$

3). On a p(A).p(B)≠ p(A∩B) signifie A et B ne sont pas indépendants.

Exercice n°2 :

1).*Cette situation est donnée par*

l' arbre ci-contre :



a).*p_1=1-p(F)=1-0.6=0.4*

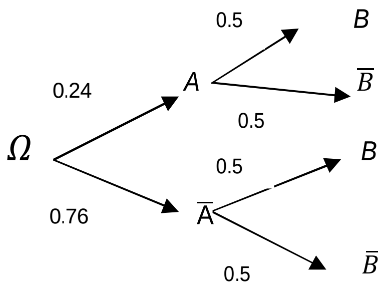
b). *p_2=p(A∩F)= p_F(A).p(F)=0,2x0.6=0.12.*

c). *p_3= p(A∩ $\bar{F}$)= $p_{\bar{F}}$(A).p($\bar{F}$)=0.3x0.4=0.12.*

2).*p(A)= p_F(A).p(F)+ $p_{\bar{F}}$(A).p($\bar{F}$)=0.12+0.12=0.24.*

1).*Cette situation est donnée par*

l' arbre ci-contre :



a).i).*p(C)= p(A∩B)= p_A(B).p(A)=0.12.*

ii). $p(D)=p(\bar{A}\cap B) = p_{\bar{A}}(B).p(\bar{A})=0.38$.

b). $p(B)= p_A(B).p(A)+ p_{\bar{A}}(B).p(\bar{A})=0.12+0.38=0.5$.

4).a). $p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0.12}{0.5}=0.24$.

b). $p_{\bar{B}}(A)=\frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}=\frac{0.24x0.5}{0.5}=0.24$.

Exercice n°3 :

1). $I_0=\int_1^e f_0(x)\,dx=\int_1^e ln(x)\,dx=[xln(x)-x]=\boxed{1}$

. $I_1=\int_1^e f_1(x)\,dx=\int_1^e xln\,(x)\,dx.$ $\quad on\ pose \begin{cases} u(x) = ln\,(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$I_1=[\frac{x^2}{2}ln(x)]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_1^e=\boxed{\frac{e^2+1}{4}}$

. $I_2=\int_1^e f_2(x)\,dx=\int_1^e x^2ln\,(x)\,dx.$ $\quad on\ pose \begin{cases} u(x) = ln\,(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$I_2=[\frac{x^3}{3}ln(x)]_1^e-\int_1^e \frac{x^3}{3x}dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_1^e=\boxed{\frac{2e^3+1}{9}}$

2). a). $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x^n\,ln(x)\,(x-1)\,dx \geq 0$*(car* $x^n \geq 0\ et\ ln(x) \geq 0\ et\ (x-1) \geq 0\ \forall$ *x∈[1 ;e])*

d 'où $I_{n+1} \geq I_n$ *donc* (I_n) *est croissante.*

3). $I_n = \int_1^e f_n(x)\,dx=\int_1^e x^nln\,(x)\,dx.$ $\quad on\ pose \begin{cases} u(x) = ln\,(x) \\ v'(x) = x^n \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$I_2=[\frac{x^{n+1}}{n+1}ln(x)]_1^e-\int_1^e \frac{x^{n+1}}{(n+1)x}dx=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_1^e=\frac{n\,e^{n+1}+1}{(n+1)^2}$

b).*On pose x=n+1 ;* $lim_{n\to+\infty} I_n = lim_{x\to+\infty}(x-1)\frac{e^x}{(x)^2}+lim_{x\to+\infty}(x-1)\frac{1}{(x)^2}=+\infty$.

c).*Supposons que* (I_n) *est majorée , on aura* (I_n) *est convergente car* (I_n) *est croissante ce qui est absurde car* $lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ *d'où* (I_n) $n'est$ *pas majorée.*

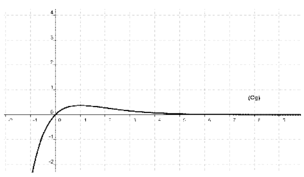
Exercice n°4 :

1).a). g '(x)=e^{-x}-xe^{-x} =(1-x) e^{-x}

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g '(x)		+	0	-	
g	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$



b).

c).A= $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$. $on\ pose \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

A$=[-x\, e^{-x}]_0^1 - \int_1^e - e^{-x}\, dx = - e^{-1} + [- e^{-x}]_0^1 = - e^{-1} + (- e^{-1} + 1) = 1 - 2\, e^{-1}$ ***u.a.***

2).a). *Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=* $e^x - x$

On a g'(x)= e^x-1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	↘	1	↗

On a 1 est un minimum global de g donc g(x)≥1 d'où g(x) > 0

Signifie $e^x - x > 0$ *signifie* $e^x > x$, $\forall\, x \in IR$, *d' où* $e^x \neq x$, $\forall\, x \in IR$.

b). *On a* $e^x \neq x$, $\forall\, x \in IR$, *signifie* $e^x - x \neq 0$ *signifie f est définie sur IR*

.On a la fonction $x \longmapsto e^x$ *est dérivable sur IR*

la fonction $x \longmapsto e^x - x$ *est dérivable sur IR et* $e^x - x \neq 0$, $\forall\, x \in IR$.

d' où f est dérivable sur IR

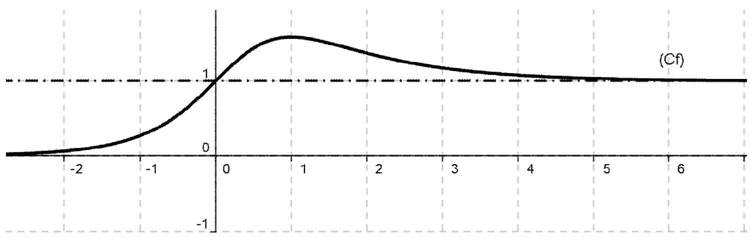
c). *f '(x)* $= \dfrac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$

On a f(1)= $\frac{e}{e-1}$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0 ↗	$\dfrac{e}{e-1}$	↘ 1

d).



BON TRAVAIL